GALBRAITH AND HAUGHTON'S SCIENTIFIC MANUALS

MATHEMATICAL SERIES.

MANUAL OF

ALGEBRA

BY

THE REV. JOSEPH A. GALBRAITH, M. A.

FELLOW OF TRINITY COLLEGE,

AND ERASMUS SMITH'S PROFESSOR OF NATURAL AND EXPERIMENTAL PHILOSOPHY IN THE UNIVERSITY OF DUBLIN,

TRANSLATED INTO URDU,

BY

MUNSHI MAHAMMAD ZAKA-UL-LAH,

Head Master, Normal School, Delhi,

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE SCIENTIFIC SOCIETIES OF ALLYGURH AND SUBA BEHAR.

گال بریتهه اور هاتن صاحب کے رساله هاے علم ریاضي میں سے

رساله علم جبر مقابله حصه اول

مولفه

ریورنڈ جوزف اے گال بریتهه صاحب ایم اے

فلو آف ٹرینیٹي کالج و پروفسر نیچرل اور اکسپریمنٹل فلاسفي

یونیورسٹي مقام ڈبلن

جسکو

منشي محمد ذکاءالله صاحب هیڈ ماسٹر نارمل اسکول دهلي نے

بتائید مقاصد

سین ٹیفک سوسئیٹي علیگڈه و سین ٹیفک سوسئیٹی صوبه بهار

اُردو میں ترجمه کیا

اور

بمقام دهلي مطبع مرتضوي میں باهتمام حاجي محمد عزیزالدین

کے مطبوع هوا

سنه ۱۸۷۱ ع

بسم اللہ الرحمن الرحیم

انگلنڈ مین گلبرتہہ اور ہاٹن صاحب کی کتب ریاضیہ بڑا رتبہ رکھتی ہین یونی ورسٹی ڈبلن
اور بڑے بڑے مدرسون کا امتحان انہین کتابون مین ہوتا ہی اونہین سی یہہ رسالہ
علم جبر ومقابلہ کے پہلے حصہ کا ترجمہ ہے اوسمین مساوات درجہ دوم تک اعمال
جبریہ بیان کی گئی ہین اور سوا سو صفحی خاص مساوات اور سوالات مساوات کے
حصہ مین آئے ہین طلبہ جب اونکو پڑہینگے تو ہر عمل مین ایسی نئی نئی باتین اونکو معلوم
ہونگین کہ کسی اور کتاب سے اونکو نہین معلوم ہوسکتین ہر مضمون کامل بیان
کیا گیا ہی کوئی بات اوسکی چہوڑی نہین گئی

فہرست مضامین

الجبرا

دیباچہ

اہل یورپ نے اس علم کو ابتدا مین عرب والون سے سیکہا اسلئے وہان بہی او

یہہ لفظ الجبر الف لام اور جبر سے بنا ہے اہل عرب اصطلاح مین جبر سے یہہ

کی طرف ذو الاستثنا کو کامل کرین اور جسقدر کامل کرین اوسقدر دوسر

اب اس عمل کو عمل انتقال کہتے ہین اور اوسے مراد یہہ ہے کہ مساواتون مین

طرف مقادیر کی علامت بدل کر لیجائین اور یہہ الف لام جنس کا اوسپر لگ

اہل یورپ کو یہہ یقین رہا کہ عرب ہی موجد اور مدون علم الجبرا کے ہو

اونکا کچہہ بے وجہ اور بے اصل تہا اسلئے کہ جب اونہون نے اس علم کو اہل عر

وہ سواء عرب والون کے کسیکو اس علم کا موجد سمجہتے لیکن جب اہل عرب

اور اہل ہند کی بیج گنت اور لیلاوتی کا باہم مقابلہ کیا گیا تو یہہ تحقیق ہوا کہ اہل ع

کو اہل ہند سے سیکہا تہا بیج گنت تیرہوین صدی مین خلاصۃ الحساب

ہوئی ہے اب یورپ والے اہل عرب کو اس علم کا مدون کہتے ہین مگر موجد

کی نسبت اہل ہند کے ساتہہ لگاتے ہین

سب سے پہلے یورپ مین الجبرا لیونارڈ دیو پیشی پیسا کے رہنے والے نے ۱۲۰۲ء

یہی شخص مشرق سے مغرب کو اس علم کی روشنی لیگیا اوسنے اس علم کو ا

اسلئے اپنی کتاب مین انہین کو موجد علم لکہا ہی اور یہی سبب تہا کہ مد

اہل عرب کو بانی مبانی اس علم کا سمجہتے رہی

یورپ مین اول اول اس علم کی کتاب ۱۴۹۴ء مین منطبع ہوئی مصنف

لیوکس ڈی برگو تہا اوسنے اپنی کتاب کا نام ایسا رکہا تہا جسکا

قاعدہ اشباہی اور اس نام کی وجہ یہہ تہی کہ اہل عرب کے یہان دستور ہی کہ مقدار مجہول کو شے سے تعبیر کیا کرتے ہین اس نام سے بہی ثابت ہوتاہی کہ اٹلی کے رہنے والون نے یہہ علم اہل عرب ہی سے سیکہا تہا

انگلستان مین سب سے پہلے تصنیف اس علم مین روبرٹ ری کورڈ کی ہی ۱۵۵۷ع مین اوسنے یہہ کتاب تصنیف کی تہی اور اوسکا نام بہی ایسا ہی رکہا تہا کہ جسکا لفظی ترجمہ قاعدہ اشبا تہا جسّے معلوم ہوتاہی کہ اوسنی بہی تقلید ڈی برگو اور اطالیہ کے متقدمین مصنفین کی کی تہی

حدود

الجبرا مین تمام مقادیر کو رموز سے تعبیر کرتے ہین اور یہہ رموز اکثر حروف تہجی ہوتی ہین اور ان مقادیر پر جو اعمال کئی جاتی ہین اونکو ان خاص علامتون سے تعبیر کرتے ہین

علامت جمع کی $+$

علامت تفریق کی $-$

علامت ضرب کی $\times$

علامت تقسیم کی $\div$

علامت $+$ کو مثبت کہتے ہین علامت $-$ کو منفی یا نفی کہتے ہین

علامت مساوات کی $=$

علامت بڑے ہونے کی $>$

علامت چہوٹے ہونے کی $<$

مقادیر علامات کی تصرف سے مثبت منفی ہوتی ہین مثلاً $+$ ا جسپر علامت مثبت متصرف ہی مثبت کہلاتی ہے اور اوس سے یہہ سمجہا جاتاہی کہ اسے تعبیر کی گئی مقدار جن مقادیر کے ساتہہ شامل ہوتی ہی اون پر زیادہ کرنی چاہئے اور اسیطرح $-$ ا جسپر علامت نفی سے موثر ہے منفی کہلاتی ہے اور اوس سے یہہ سمجہا جاتاہے کہ ا اوس مقدار مین سی تفریق ہونی چاہئے

جسے وہ علامت - کے ساتھہ شامل ہوئی ہے

اگر کوئی علامت رقم کی اول نہ ہو تو اوسکو مثبت سمجھنا چاہئی مثلا رقم ا بغیر علامت کی ہے اوسے + ا سمجھنا چاہئے

مرکب جملہ کے رکن مفرد کو رقم کہتے ہین

جس جملہ مین ایک رقم ہو اوسکو جملہ مفرد کہتے ہین مثلا ا اور - ب

اگر جملے مین دو رقمین علامات + اور - سے شامل کی گئی ہون تو اوسکو جملہ ثنائی یا دو رقمہ کہتے ہین مثلاً ا + ب اور لد - ی وغیرہا

جب دو رقمین علامت - کے ساتھہ شامل ہون تو اوس جملہ کو بعض اوقات جملہ مابقی کہتے ہین

جس جملہ مین تین رقمین علامات + اور - کے ساتھہ شامل کیجائین اوسکو جملہ ثلاثی یا سہ رقمہ کہتے ہین اور چار رقمون کے جملہ کو جملہ رباعی اور علی العموم اگر جملہ مین بہت سے رقمین ہون تو اوسکو جملہ کثیر الارقام کہتے ہین

جب یہہ منظور ہوتا ہے کہ تمام ارقام جملہ کثیر الارقام کی ایک ہی علامت سے موثر ہو تو اوسکو دو خطوط قوسی کے اندر یا خط عرضی کے نیچے لکہدیتے ہین مثلاً اگر جملہ ثلاثی ا + ح + د ہو اور اوسکو ا سے تفریق کرنا منظور ہو تو اس جملہ کو ایسے خطوط ( ) مین لکہکر اول علامت - کی اسطرح لکہدو کہ ا - (ب + ح + د) یا ایک خط عرضی کے نیچے اسطرح کہ ا - ب + س + د

اور اگر ا کو جملہ مابقی ب - ح مین ضرب دینا ہو تو اسطرح لکہو کہ ا × (ب - ح) ان خطوط قوسی کو خطوط وحدانی کہتے ہین

جب اعداد یا رموز علامت × کے شامل کی گئی ہون تو اوس سے مراد یہہ ہوتی ہے کہ وہ آپسمین ضرب دی گئی ہین لیکن اکثر علامت ضرب کی محذوف کردیتے ہین ا اور لا کے حاصلضرب کو الا کی طرح بجای ا × لا کے لکہتے ہین حاصلضرب ۷ اور لا کا ۷ لا کی طرح لکہا جاتا ہی جو مضروب لا کا ان رقمون مین سے اوسکو سر یا امثال دوسری رقم کا کہتے ہین اگر امثال یا سر عدد ہو جیسا کہ ۷ لا مین سے اوسکو امثال عددی یا سر عددی کہتے ہین اور اگر علامت عامہ یا حرف ہو جیسا کہ الا مین سے اوسکو

اشتمال حرفی کہتے ہین

جب ایک مقدار دوسری مقدار پر تقسیم ہوتی ہی تو مقسوم اور مقسوم علیہ کو ربط اس علامت ÷
سے دیتے ہین جیسے کہ ا ÷ ب سے مراد یہہ ہے کہ ا کو ب پر تقسیم کرو

عمل قسمت کی تعبیر کرنیکا یہہ طریقہ کثیر الاستعمال ہی کہ مقسوم اور مقسوم علیہ کو اوس طرح ربط دیتا
جس طرح حساب مین کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما کو ربط دیتے ہین جیسے کہ ا کو ب پر تقسیم کرنا ہو
اوسکو $\frac{ا}{ب}$ کی طرح لکھو اور لا ÷ (د+ی) کو $\frac{لا}{د+ی}$ کی طرح لکھو

جب کئی ایک مقادیر آپسمین ضرب دی جائین تو ہر ایک مقدار اس حاصلضرب کا جزو ضربی کہلاتا ہے
جیسے کہ ا × ب × ج × د یعنی ا ب ج د ایسا حاصلضرب ہی کہ اوسمین چار اجزاء ضربی ہین

اگر تمام اجزاء ضربی مساوی ہون تو اونکی حاصلضرب کو قوت کہتے ہین جیسے کہ دوسری قوت
ا کی ا × ا ہی اور تیسری قوت ا کی ا × ا × ا ہی اور چوتھی قوت ا کی ا × ا × ا × ا ہے
اور علی ہذا القیاس اب اس دقت کے دور کرنیکے واسطے کہ ایک حرف باربار لکھنا پڑتا ہے
یہہ مختصر طریقہ کتابت کا اختیار کیا گیا ہی کہ

دوسری قوت ا کی = $ا^{2}$
تیسری قوت ا کی = $ا^{3}$
چوتھی قوت ا کی = $ا^{4}$
ن وین قوت ا کی = $ا^{ن}$

جو عدد کہ اوپر حرف کے لکھا جای اوسکو قوت نما یا نشان قوت کہتے ہین

جس عمل سی کہ ایک مقدار قوت مین اٹھتی ہی اوسکو صعود کہتے ہین اور اس عمل کا عکس نزول ہے
اوسے عدد معلوم کا ایک جزو ضربی ایسا تلاش کرتی ہین کہ اوسکو فی نفسہ اتنی دفعہ ضرب دین جتنی دفعہ
کی ضرورت ہو تو وہ عدد معلوم پیدا ہو جاے جیسے کہ جذر المکعب ۸ کا ۲ ہی کیونکہ ۸ = ۲ × ۲ × ۲ = $۲^{۳}$
اور چوتھی قوت کا نزول ۲۵۶ کا ۴ ہے کیونکہ ۲۵۶ = $۴^{۴}$ علامت جذر کی $\sqrt[ن]{}$ ہے
جسمین ن مرتبہ کا جذر ظاہر ہے ایک نقطہ کا حرف اویسن ہے اور اوسکے معنی جذر کے ہین

پس اکا تیسرا نزول ۳ لا^{2}ا اور لا + ا کے پانچوین مرتبہ کا نزول ۵ لا + ا ہے
دوسرے مرتبہ کے جذر سے لکھتے ہین اکثر جذر نما کو نہین لکھتے ہمیشہ اوسکو محذوف کر دیتے ہین
جیسے کہ √ا سے مراد جذر ا کا ہے

علامات جبریہ سے اعداد یا رموز شامل کئے جائین تو اونکو جملہ کہتے ہین اور جب اوس جملہ کی کسی خاص مقدار یا حرف پر توجہ کی جائے تو اوس جملہ کو جملہ خاص اوس مقدار کا یا حرف کا کہتے ہین جیسے کہ
ا + ب لا + ح لا^{2} کو جملہ خاص لا کا اور کسر (ا + ی)/(ا − ی) کو جملہ خاص ی کا کہتے ہین

رتبہ کسی رقم کا اوسکے اجزاء ضربی کی قوت نماؤن کی جمع کرنے سے معلوم ہوتا ہے جیسے کہ رقم لا^{2} ی^{3} ط پانچ رتبہ کی ہے اور لا^{2} ی^{3} ط^{4} نو رتبہ کی جب ایک جملہ مین کئی ایک رقمین ہون اور سب کا ایک ہی رتبہ ہو تو اوسکو جملہ متجانسہ کہتے ہین جیسے کہ ا لا^{2} + ب لا ی + س ی^{2} جملہ متجانسہ لا اور ی کا ہے کیونکہ یہہ حروف جن رقمون مین شامل ہین وہ دوسرے رتبے کے ہین اور جملہ ا لا^{3} + ب لا^{2} ی + ح لا ی^{2} + د ی^{3} بھی متجانسہ اس سبب سے ہے کہ ہر رقم لا اور ی کے اعتبار کے موافق تیسرے رتبہ کی ہے

جب ایک جملہ کسی حرف کا جملہ خاص ہو تو اس حرف کی جو اعلی قوت ہوگی اوسکی موافق درجہ اوس جملہ کا کہلایگا مثلا جملہ خاص لا کا ا لا^{3} + ب لا^{2} + س لا + د تیسرے درجہ کا اور
م لا^{5} + ن لا^{4} + ع لا^{3} + ت لا^{2} + ر لا + ص پانچوین درجہ کا کہلاتا ہے

جن مقادیر مین فقط امثال ہی کا فرق ہو اونکو مقادیر متماثلہ کہتے ہین جیسے کہ ۴ لا و ۳۰ لا و ۹۶ لا مقادیر متماثلہ ہین اور ۵ لا ی و ۴ م لا ی اور (ع + ق) لا ی مقادیر متماثلہ ہین اگرچہ بعض کی امثال امثال حرفی ہین برخلاف اسکی مقادیر ۴ لا و ۳ لا^{2} و ۷ ی و ا لا ی و م ی مقادیر غیر متماثلہ ہین

جسقدر بڑی مقدار چھوٹی مقدار سے بڑی ہو اوسکو فرق حسابیہ کہتے ہین اور اوسکو اسطرح تعبیر کرتے ہین کہ علامت ~ کی اون دونو مقادیر کے درمیان لکھدیتے ہین اور اوسمین کچھہ لحاظ تقدم کا نہین کرتے جیسے کہ ۳۰ ~ ۱۵ کے وہی معنی ہین جو ۱۵ ~ ۳۰ کے ہین ہر ایک مساوی ۵ کے ہے

الفاظ چونکہ اور تو اور اسواسطے اور اسلئے اور کیونکہ اور اس وجہ سے وغیرہ بہت سی بار بار لکھنے پڑتے ہین

اختصار کے واسطے ان الفاظ کی جگہہ ان علامتون کو کام مین لاتے ہین کہ

∵ کیونکہ اس سبب سے

∴ اسواسطے واسلئے و تو وغیرہا

علامات + اور −

چونکہ علامات + اور − کی روابط مقادیر مین ہے اسلئے جب کوئی رقم تنہا +ا اور −ا کی صورت کی آجاوی تو اوسکی کچھہ معنی حقیقت مین نہونگی اگر یہہ نہ سمجھین کہ وہ اور مقادیر کے ساتہہ رابطہ رکھتے ہے تحقیقات جبریہ کے نتایج مین اکثر ایسی رقمین آجاتی ہین اسلئے ضرور ہوا کہ کوئی قاعدہ ایسا مقرر کیا جاوی کہ جسکے موافق معنی اونکی ٹہیک ٹہیک سمجھی جائین اب اس قاعدہ کے سمجھنے کے لئے اس مساوات پر دہیان کرو

لا = ا − ب

اگر ا بڑا ب سے نہو تو موافق علم حساب کے لا کی کچھہ معنی نہین ہونگے

اور اگر ا برابر ب کے ہو تو اس صورت مین قیمت لا کی صفر ہوگی

لا = ب − ب = ۰

مقادیر +ب اور ب برابر ہین اور اون پر مخالف علامت متصرف ہین تو ہم اونکو یہہ کہا کرتی ہین کہ وہ ایک دوسرے کو فنا کرتی ہین

اگر ا > ب تو ایک محدود مقدار چہوٹی بڑی موافق ا اور ب کی خاص قیمتون کی ہوگی مثلاً

اگر ا = ۳۰ اور ب = ۱۵ تو

لا = ۳۰ − ۱۵ = ۱۵ (۱)

لیکن اگر ا < ب مثلاً اگر ا = ۲۰ اور ب = ۲۵ تو بتاؤ اس مساوات مین مقدار لا کے کیا معنی ہونگے

لا = ۲۰ − ۲۵ (۲)

اس سوال کے جواب دینے کے واسطے مساوات (۱) پر دہیان کرنا چاہیے اب لا کو کسی عدد پر مثلاً ۱۰۰ پر زیادہ کرو تو ظاہر ہے کہ مجموعہ اسطرح حاصل ہوگا کہ اول ۳۰ پر ۱۰۰ زیادہ کرین اور پہر ۱۵ اتفریق کرین تو حاصل ۱۰۵ ہوگا اور یہی حاصل ہوتا اگر ۳۰ اور ۱۵ اسکے

فرق حاسبہ ۵ کو ہم زیادہ کرلیتے

اب اگر رمز لا پر اور اوسکی مساوی کہ ۳۰ ـ ۲۵ پر مساوات (۲) کام مین لائین تو مجموعہ ۱۰۰ اور لا کا اسطرح حاصل ہوگا کہ اول ۳۰ زیادہ کرین اور پہر ۲۵ تفریق کرین تو ما حصل ۹۵ ہوگا اور یہہ ماحصل اسطرح بہی حاصل ہوسکتا تہا کہ اول ہی ۵ تفریق کرین اور یہہ ۵ فرق حاسبہ ۳۰ اور ۲۵ کا ہی لیکن کسی رقم کا تفریق ہونا علامت ـ سے سمجہا جاتا ہی تو اس صورت مین

لا = ۳۰ ـ ۲۵ = ـ ۵

اور یہی نتیجہ حاصل ہوتا اگر اول ۱۰۰ مین سے ۲۵ کو تفریق کرتے اور باقی ۷۵ پر ۳۰ زیادہ کرتے اسے یہہ ظاہر ہوتا ہے کہ

لا = ـ ۲۵ + ۳۰ = ـ ۵

پس اس بیان سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ایک منفی مقدار کو ایک مثبت مقدار پر زیادہ کرسکتے ہین اور انکا مجموعہ جبریہ برابر اونکے فرق حاسبہ کے ہوسکتا ہے اور اوسپر علامت بڑے عدد کی ہوتی ہی اور اسسے یہہ بہی ہمکو معلوم ہوا کہ مجموعہ جبریہ کی ارقام کی ترتیب کو بدل سکتی ہی بشرطیکہ علامت ہر رقم کی وہی رہے اور اوسمین کچہہ تغیر نہ واقع ہو

اب پہر اس مساوات

لا = ۳۰ ـ ۱۵

پر خیال کرو اور فرض کرو کہ لا کو ۱۰۰ مین سے تفریق کرنا ہے اب یہہ ظاہر ہے کہ اگر ۱۰۰ مین سے ۳۰ تفریق کرین تو باقی ۸۰ رہین اور جتنی باقی رہنی چاہئے تہی اوسے بقدر ۱۵ باقی کم ہوگا اسواسطے اس باقی پر ۱۵ زیادہ کرنی چاہئے تو اصل باقی ۹۵ حاصل ہوگی اور یہہ نتیجہ سیدہی طرح سے یون حاصل ہوجاتا اگر ۵ کو تفریق کرتے اور یہہ ۵ برابر ۳۰ ـ ۱۵ کے ہے

اب ۱۰۰ مین سے لا کی تفریق کرنیکا عمل جب

کام مین لائین تو ۳۰ لا کو تفریق کیا تو باقی ۸۰ حاصل ہوئی اسپر ۲۵ زیادہ کئی تو موافق عمل مذکور کے قدم بقدم چلنے سے صحیح صحیح باقی ۱۰۵ حاصل ہوئی اور یہہ ماحصل سیدہی طرح یون حاصل ہونا چاہئے

کہ - ۵ کو جو برابر ۲ - ۵ ہ کے ہے تفریق کرین اس سے یہہ ظاہر ہوتا ہے کہ - ۵ کے تفریق کرنیکے
یہہ معنی ہین کہ + ۵ کو زیادہ کرین اور علی العموم مقادیر جنپر علامات جبریہ متصرف ہون تفریق
اسطرح ہونگین کہ اونکے علامتین بدلکر جمع کرلین
جو نتایج ہم کو حاصل ہوئی ہین اونکو چند مقدمات کی صورت مین لکھتے ہین

مقدمہ ۱

جن مقادیر پر مختلف علامتین متصرف ہون تو اونکا مجموعہ جبریہ فرق حسابیہ کے برابر ہوتا ہے جسپر علامت
وہ ہوتی ہے جو بڑی مقدار پر ہو

مقدمہ ۲

خواہ کتنی ایک ارقام ہون اونکا مجموعہ جبریہ اسطرح حاصل ہو سکتا ہی کہ متواتر اون مقادیر کو اونکی
علامتون کے ساتہہ ایک سطر مین لکھ لین

مقدمہ ۳

دو مقدارون کا حاصل تفریق اسطرح حاصل ہوتا ہی کہ مفروق کی علامتین بدلکر مفروق منہ کے ساتہہ جمع کرین
چونکہ علامات + اور - سے مقامات اور سمتین اور اور حالتین بہی معلوم ہوا کرتی ہین اسلئے ہم
کچھہ توضیحات اس مطلب کی بہی لکھتے ہین
فرض کرو کہ ایک سڑک ٹہیک مشرق اور مغرب کے درمیان بنی ہوئی ہی اور ط اوسپر ایک مقام ہے
یعنی وہ مقام ہے جہان سے ہم چلنا شروع کرتے ہین

ی ب ا ب ط و

اگر اوس طول مسافت کو + ا تعبیر کرے جو ط سے شروع ہو اور مشرق کی طرف طی کی جاے
اور جہان یہہ مسافت ختم ہو وہان اسی سمت مین دوسری مسافت + ب طی کیجاے تو کل مسافت
لا طے شدہ ا + ب سے تعبیر ہوگی
اگر تیسری اور مسافت ح مشرق کی طرف طی کیجاے تو کل فاصلہ طے کیا گیا

لا = ا + ب + ح

اور علی ہذا القیاس یہہ بات قابل لکھنے کے ہی کہ ارقام ا اور ب اور ح کی خواہ کچھہ ہی ترتیب ہو یعنی کوئی سی مسافت اول طی کیجاے یا دوسری دفعہ اوسی کل مسافت طی شدہ مین کچھہ فرق نہین آتا بشرطیکہ وہ ایک ہی سمت مین ہون کل فاصلہ طے کیا گیا مجموعہ تمام مسافتون کا ہوگا

اب ہمکو اس مساوات

لا = ا - ب

پر خیال کرنا چاہیے یہہ ظاہر ہے کہ علامت - سے سمت کا تبدیل ہونا ظاہر ہوتا ہی یعنی مسافر نے اول سفر ا میل کا مشرق کی سمت مین کیا اور وہان سے مغرب کی سمت مین الٹا ط کی طرف ب میل چلا اسپر بھی مسافت طی شدہ دو ارقام کے مجموعہ جبریہ سے تعبیر کیجاتی جنمین سے ایک مثبت ہی اور دوسرا منفی اب اسکی تین صورتین ہین اور انکا جدا جدا بیان ہوتا ہی

اول فرض کرو کہ ا > ب

تو بموجب مقدمہ (۱) کے فاصلہ لا کا فرق حسابیہ ا اور ب کا ہی جسپر علامت مثبت متصرف ہی اور اسکا مطلب یہہ ہے کہ مسافر ط کی مشرق کی جانب مین ہے

دوم فرض کرو کہ ا = ب

اس صورت لا = ۰ اسے معلوم ہوتا ہی کہ مسافر مراجعت کرکے ط پیر آگیا اور وہ جس مقام سے چلا تھا اوسکے مشرق کی جانب مین ہے نہ مغرب کی جانب ہین

سوم فرض کرو کہ ا < ب

بموجب مقدمہ (۱) کے فاصلہ لا فرق حسابیہ ا اور ب کا ہی جسپر علامت منفی متصرف ہی اور اسکی یہہ مراد ہی کہ مسافر ط کی مغربی جانب مین اسقدر فاصلہ پر ہے

اسے صاف یہہ اصول معلوم ہوتا ہی کہ جب کسی مقدار کی علامت تبدیل ہوتی ہی تو ضرور اوسکی نوبت صفر پر پہونچتی ہے

اگر مسافر متواتر مسافتین مشرق مغرب پر طی کرتا ہے یعنی کبھی مغرب کو جاتا ہی اور کبھی مشرق کو آتا

تو اوسکا فاصلہ لد کا ظ سے اس طرح تعبیر ہوتا ہے

لد = ا + ب − ح + د − ر − س وغیرہما

یہہ بات ذرا توجہ کرنے سی سمجہہ مین آجاتی ہے کہ مسافتین جو مسافر طی کرتا ہی اگر وہ ایک ہی سمت مین ہون تو اونکی ترتیب خواہ کچہہ ہی ہو حاصل ایک ہی ہے اور اسکے معنی اور مقدمہ دوم کے معنی ایک ہی ہین تمام رقمین جنپر علامت + متصرف ہی ایک خطوط وحدانی اور تمام رقمین جنپر علامت − موثر ہے دوسری خطوط وحدانی مین جمع کیجائین تو ظاہر ہے کہ

لد = (ا + ب + د + وغیرہما) − (ح + ر + س + وغیرہما)

اب اس مساوات کے معنی اور اس بیان کا مفہوم ایک ہی ہے کہ اگر ایک مسافت مشرق کی جانب مین برابر تمام مشرقی مسافتہاء جزئیہ کی لیجاے اور ایک مسافت مغرب کی جانب برابر تمام مغربی مسافتہاء جزئیہ کی لیجاوی تو ان دو مسافتون کے طے کرنے سے مسافر اوسی مقام پر پہونچیگا جہان وہ اپنی مسافتہاء جزئیہ کو خواہ کسی ترتیب سے طے کر کے پہونچتا

اوپر کے بیان سے یہہ واضح ہوتا ہی کہ ارقام علامات + اور − کے ساتہہ مربوط ہون اونکا مجموعہ موافق مقدمہ ذیل کے معلوم ہوتا ہی

مقدمہ ۴

اگر تمام رقمون کی ایک ہی علامت ہو تو اونکا مجموعہ جبریہ برابر اونکے مجموعہ حسابیہ کے ہوگا اور اوسکی علامت علامت مشترک ہوگی

اگر بعض ارقام مثبت ہون اور بعض منفی تو اونکا مجموعہ جبریہ برابر مجموعہ مثبت ارقام اور مجموعہ منفی ارقام کے فرق حسابیہ کے ہوگا اور اوسپر علامت بڑی مجموعہ کے ہوگی

مثالین

(۱) ۱۲ + ۱۴ + ۱۷ + ۱۰ + ۱ کی حاصل جمع کیا ہوگا جواب ۱۳۳

(۲) −۱۲ − ۱۳ − ۱۵ − ۱۱۲ − ۱ کا مجموعہ کیا ہوگا جواب −۱۳۳

(۳) ۵ لد − ۷ الد + ۱۶ الد − ۲۳ لد + ۴ لد − ۱۰ الد کا حاصل جمع کیا ہوگا جواب − ۱۵ الد

(۴) ۱۰۰ الد − ۲۰ لد − ۵ الد + ۳۰ لد + ۳۵ الد کا حاصل جمع کیا ہوگا جواب ۱۳۰ الد

(۵) ۲۱ لد اور − ۱۱ لد کا فرق جبریہ کیا ہوگا جواب ۳۲ لد

(۶) − ۲۰ لد اور ۱۳ لد کا فرق حسابیہ کیا ہوگا جواب − ۳۳ لد

جمع

دو یا زیادہ جبریہ جملوں کے جمع کرنیکا قاعدہ یہہ ہے کہ

قاعدہ

(۱) جن جملونکو جمع کرنا ہو اونکو اوپر تلے اسطرح لکھو کہ ارقام متماثلہ ایک دوسرے کے محاذی ہوں

(۲) امثال ارقام متماثلہ کے مجموعہ جبریہ کے اول علامت مشترک لکھو

(۳) جب مقادیر متماثلہ کو اسطرح جمع کر کے لکھ چکو تو اونکے ساتھ جو مقادیر غیر متماثلہ اگر ہوں تو جس ترتیب سے چاہو مع اونکی علامتوں کے لکھ دو

پس جو جملہ اسطرح حاصل ہوگا وہ حاصل جمع مطلوب ہوگا

مثالیں

(۱) ۳ لد − ۱۱ ک + ۷ ی اور − ۲ لد + ۷ ک − ۶ ی اور ۱۰ لد + ۳ ک − ۱۵ ی جمع کرو

۳ لد − ۱۱ ک + ۷ ی
− ۲ لد + ۷ ک − ۶ ی
۱۰ لد + ۳ ک − ۱۵ ی
---
۱۱ لد − ۳ ک − ۱۴ ی

(۲) جملوں ۳ ک − ۷ لد + ۱ اور ۲ لد − ۴ ی − ۳ + ک اور ۱۱ ہ − ۵ لد − ۷ ک − ۱۰ اور ۴ ح + ۳ لد + ۲ ک + ۱۰۲ کو جمع کرو

۳ ک − ۷ لد + ۱
ک + ۲ لد − ۳ − ۴ ی
− ۷ ک − ۵ لد − ۱۰ + ۱۱ ہ
۲ ک + ۳ لد + ۱۰۲ + ۴ ح

− ک − ۷ لد + ۹۱ − ۴ ی + ۱۱ ہ + ۴ ح

اس مثال میں جملوں کو اسطرح لکھا کہ ارقام متماثلہ ایک دوسرے کے نیچے آجائیں

(۳) ان جملوں کو جمع کرو کہ

۳ لا۲ + ۴ لا۲ ی − ح لا ی۲ و ا لا۲ ی − ع لا۲ − ۲ لا ی۲ اور ۸ لا ی۲ + لا۲ − س لا۲ ی

۳ لا۲	+ ۴ لا۲ ی	− ح لا ی۲
− ع لا۲	+ ا لا۲ ی	− ۲ لا ی۲
لا۲	− س لا۲ ی	+ ۸ لا ی۲
(۴ − ع) لا۲	+ (۴ + ا − س) لا۲ ی	+ (۶ − ح) لا ی۲

اس مثال میں تعداد متماثلہ کے بعض امثال عددی ہیں بعض امثال حرفی ہیں ایسی صورتوں میں محمل کر سکتا
یہہ قاعدہ ہے کہ امثالوں کے مجموعی جبریہ کو خطوط وحدانی میں لکھو اس عمل کو ارقام متماثلہ کے
امثالوں کا جمع کرنا کہتے ہیں

مشق اول

ان جملوں کو جمع کرو

(۱) ۴ ا − ۳ ب + ۶ ح و ۲ ا − ۷ ب + ۱۱ ح اور ۲۱ ا + ۱۰ ب − ۲ ح

(۲) ۳ لا + ۴ ی − ۶ و − ۵ ی − ۲ لا + ۱۰ و ۷ − لا − ی اور ۱۵ لا + ۳ ی

(۳) ۱۲ ا ب۲ + ۴ ا۲ ب − ۲ ا ب و ۱۱ ا ب + ۳ ا۲ ب − ۷ ا ب۲ اور ۱۴ + ۶ ا ب + ۹ ا ب۲

(۴) ۱۶ لا۲ − ۷ ای۲ + ۱۰۰ ای۲ − لا ی + ۱۲ ای و − لا۲ − ۳ ی ی + ۴ لا ی اور ۴ ای۲ − ۱۱ لا۲ + ۱۰۰

(۵) ۳ لا۳ − ۲ لا۲ + ۷ لا − ۱ و − ۹ لا۳ + ۱۱ لا − ۳ و ۹ لا۲ + ۷ لا۲ − ۱۰ اور ۱۵ لا۲ + ۱۰۰

(۶) ا لا۲ + ب لا ی + ح ی۲ و ع ی۲ − ق لا۲ و لا۲ − ب لا ی − ی۲

(۷) ۴ لا + ۱۷ ا − ۱۳ ا ب + ۱۲ لا ی و ۳ ح − ۱۲ ا ب + ۱۵ لا − ۱۱۱ و ۱۴ ی + ۳ لا ی − ۲۱ لا
اور ۱۱ + ۱۵ ی − لا ی

(۸) ا۲ − ۳ ا ب + ح۲ − ۱ و ا ب + ح۲ − ۷ و ۴ ا۲ + ۱۰ − ۹ ا ب اور ۲ ا ب + ۴ ح۲

(۹) س لا۲ + گ لا ی + ص ی۲ و ۳ ی۲ − لا ی + لا۲ اور ت ی۲ + ک لا۲ اور لا۲ + لا ی + ی۲

(۱۰) ا + ب + ح + د اور ۱۹ ا د − ۴ ب + ا د ۳ ح + ۴ د د ا ۲ ح − ۱۴ ب د ۴ ح − ۲ د

اور ۳ ا − ۵ ب + ۲ ح − د

تفریق

ایک جبریہ جملہ کو دوسرے جبریہ جملہ مین سے تفریق کرنیکا قاعدہ یہہ ہے کہ

قاعدہ

(۱) مفروق کو مفروق منہ کے نیچے اس طرح لکھو کہ ارقام متماثلہ اوپر تلے ہون

(۲) مفروق کے ہر رقم کی علامت بدلو اور جو رقم اوسکے اوپر ہو اوسکے ساتھہ جمع کرو ماحصل فرق مطلوب ہوگا

(۱) ۳ لا − ۲ ک + ۱۰ ی مین سے ۲ لا − ۵ ک + ۳ ی تفریق کرو

۳ لا − ۲ ک + ۱۰ ی
۲ لا − ۵ ک + ۳ ی
لا + ۳ ک + ۷ ی

اول سطر عمودی مین مجموعہ جبریہ ۳ اور −۲ کا ایک ہے یہہ سر لا کا باقی مین اول رقم کا ہی اور دوسری سطر عمودی مین مجموعہ جبریہ −۲ اور +۵ کا +۳ ہی یہہ باقی مین دوسری رقم کا سر ہے اور تیسری سطر عمودی مین مجموعہ جبریہ ۱۰ اور −۳ کا +۷ ہی یہہ سر امثالی کا

(۲) ۳ ک^2 − ۱۸ لاک + ۴ لا^2 کو ۵ لا^2 − ۷ ک^2 + ۱۰ لاک مین سے تفریق کرو

۳ ک^2 − ۱۸ لاک + ۴ لا^2
−۷ ک^2 + ۱۰ لاک + ۵ لا^2
۱۰ ک^2 − ۲۸ لاک − لا^2

(۳) ۷ ا − ۵ ب + ۶ ا ب مین سے ۳ ا + ۲ ب − ح + ۲ کو تفریق کرو

۷ ا − ۵ ب + ۶ ا ب
۳ ا + ۲ ب . − ح + ۲
۴ ا − ۷ ب + ۶ ا ب + ح − ۲

(۴) ا لا^2 − ب لاک + ح ک^2 + د مین سے ۲ لا^2 + لاک + ۴ ک^2 − ۲ تفریق کرو

ا لا^2 − ب لاک + ح ک^2 + د
۲ لا^2 لاک + ۴ ک^2 − ۱۰
(ا − ۲) لا^2 − (ب + ۱) لاک + (ح − ۴) ک^2 + د + ۱۰

امثلہ مشق ۲

	مفروق منہ	مفروق
(۱)	۳ا + ۵ب − ۲ج	۲ا + ۷ب − ج
(۲)	۱۰ا^2 − ۲اب + ۴ب^2	−۲ب^2 + ۲اب − ا^2
(۳)	۱۰لا^3 + ۲لا^2 − ۷لا + ۲	لا^3 + ۳لا^2 − لا − ۱
(۴)	۱۸لاء + ۵لای − ۱۳ی ء + ۱۰	۱۴ی ء − ۱۰لاء − ۵لای
(۵)	۴ا − ۵ب + ۳ج − ۲	ا + ب + ج + ۱
(۶)	م لا^2 − ن لاء + ع ء^2 + ۱	ا لا^2 + ب لاء − س ء^2 + ل
(۷)	(ا + ب) لا^3 + (ب + ج) لا^2 + (ج + ا) لا + ا ب ج	(ب − ا) لا^3 + (ج − ب) لا^2 + (ا − ج) لا − ا ب ج
(۸)	۲لا^3 − ۳ء^3 + ۲لا^{2}ء − ۷لاء^2	۲لاء^2 + ۳ء^3 − لا^{2}ء + ۱۰لا^3
(۹)	ا لا^2 − ل لا + ج	لا^2 + لا + ۱
(۱۰)	۱۰لا^2 − ۱۱لاء − ۳ء^2 + ۴لا − ۵ء + ۶	۷ء^2 − ۳لا^2 − لاء − لا − ۲ء + ۲

خطوط وحدانی

جب کسی جبریہ جملے کے دو یا زیادہ ارقام پر ایک ہی عمل کرنا منظور ہوتا ہے تو اونکو خطوط وحدانی ( ) کے اندر لکھدیتے ہیں اور برخلاف اسکے اگر ارقام ایسی خطوط وحدانی کے اندر اور ارقام کے ساتھ لکھے ہوئے ہوتے ہیں تو اونکو علیحدہ کرنیکی بھی ضرورت ہوتی ہی اسلئے ہم خطوط وحدانی کے اندر ارقام کے داخل کرنے کے اور ارقام پر سے خطوط وحدانی دور کرنیکے قواعد لکھتے ہیں

قاعدہ

خطوط وحدانی دور کرنیکا

(۱) اگر خطوط وحدانی پر علامت مثبت ہو تو ان خطوں کو دور کرو اور ارقام جو اونکے اندر لکھی ہوئی ہوں اونکو بعینہٖ جوں کا توں لکھدو اور ہر ایک کی وہی علامت رہنے دو جو اوسکی ہو

(۲) اگر خطوط وحدانی پر علامت منفی کی ہو تو خطوں کو دور کرو اور اونکی اندر کی ارقام کی علامت بدل کر لکھدو

مثالیں

(۱) جملہ ا + ب + (لا + ء − ی) کی خطوط وحدانی دور کرو

جواب ا + ب + لا + ء − ی

(۲) جملہ ا + ب − (لا + د − ی) کی خطوط وحدانی دور کرو جواب ا + ب − لا − د + ی
دلیل اسکی قواعد جمع اور تفریق سے ظاہر ہے

(۳) اس جملہ − (م + ن) − [ا − (م − ن)] سے خطوط وحدانی دور کرو
اس صورت مین ایک خطوط وحدانی کے اندر دوسرے خطوط وحدانی واقع ہوتی ہین اسواسطے ضرور ہوا کہ
قاعدہ مذکور کو دو دفعہ متواتر کام مین لائین اول دفعہ مین ہم م − ن کو ایک رقم خیال کرین
تو دو خطوط وحدانی کے دور کرنے سی ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ

− م − ن − ا + (م − ن)

اور دوبارہ خطوط وحدانی کے دور کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ

− م − ن − ا + م − ن

ان ارقام کو ساقط کرو جو آپسمین ایک دوسرے کو فنا کرتی ہین تو یہہ جواب حاصل ہوگا کہ

− ا − ۲ن

امثلہ مشق ۳

جملہای ذیل سی خطوط وحدانی دور کرو

(۱) ا − ب + (۲ب − ا) (۲) (ا − ب) − (۳ب − ۱)

(۳) (ا − لا) + (لا − ب) − (ا − ب) (۴) لا د − (لا ا − لا ی − لا د)

(۵) ا لا + (ب لا + ج د) − (ا لا + د د) (۶) − (۲ا لا + ۳د) + (۵ لا − ۴د)

(۷) [ا − (لا − د)] − (۲ا + لا + د) (۸) (لا۳ − د۳ + لا۲ د) − (۲د۳ − ۴ لا۳)

(۹) [م − ن − ۳ لا − ۲د] − [۲ لا + ۵د − ن + م]

(۱۰) − [ع − ق + (− ا − ۲ع − ق)]

خطوط وحدانی کے داخل کرنیکا

قاعدہ ۵

(۱) جن ارقام کو مثبت خطوط وحدانی کے اندر داخل کرنا منظور ہو اونکو مع اونکی علامتون کے
خطوط وحدانی کے اندر جس ترتیب سے چاہو لکھدو

(۲) جن ارقام کو منفی خطوط وحدانی کے اندر داخل کرنا منظور ہو اونمین سے ہر ایک کی علامت بدل کر
خطوط وحدانی کے اندر لکھدو

مثالیں

(۱) ا-ب+ح-۲د-۱ کی تین اخرکی رقمیں مثبت خطوط وحدانی کے اندر داخل کرو

جواب ا-ب+(ح-۲د-۱)

(۲) ان تین رقموں کو منفی خطوط وحدانی کے اندر داخل کرو

جواب ا-ب-(۲د-ح+۱)

علامات + اور −

چونکہ تمام جملوں میں دو یا زیادہ ارقام علامات + اور − کے ساتھہ مربوط ہوتے ہیں اسلئے ضرور ہوا کہ دو جملوں کی ضرب میں یہہ دریافت کریں کہ عمل ضرب میں یہہ علامتیں کس طرح مخلوط ہوتی ہیں فرض کرو کہ ا اور ب کے فرق کو ح اور د کے فرق میں ضرب دینا ہی اگر اعداد پر خیال کریں تو یہہ امر ظاہر معلوم ہوتا ہی کہ حاصلضرب مقدار (ا-ب) اور فرق ح اور د کا برابر ہے اون حاصلضربوں کے تفاوت کی جو ا-ب کو ح اور د میں جدا جدا ضرب دینے سے پیدا ہوتے ہیں یعنی (ا-ب)(ح-د) = (ا-ب)ح-(ا-ب)د

اور اسی خیال سے یہہ بھی ظاہر ہے کہ

(ا-ب)ح = اح-بح

(ا-ب)د = اد-بد

اسیواسطے تفریق کرنے سے

(ا-ب)(ح-د) = اح-بح-اد+بد

اسے یہہ ظاہر ہوتا ہی کہ ا-ب کو (ح-د) میں ضرب دینے کا عمل اس صورت اجمالی میں ہوتا ہے

ا-ب
ح-د
―――――
اح-بح
-اد+بد
―――――
اح-بح-اد+اب

اب اس عمل سے یہہ ایک صحیح مقدمہ مرتب ہوتا ہے

مقدمہ

(۱) جب دو رقموں پر ایک ہی علامت متصرف ہو خواہ دونو پر + ہو خواہ دونو پر − ہو تو ا

حاصلضرب مثبت ہوگا

(۲) جب دو رقموں پر مختلف علامتیں متصرف ہوں ایک + ہو دوسری − ہو تو اونکا حاصلضرب منفی ہوگا

یہہ مقدمہ جو اعداد پر خیال کرنے سے پیدا ہوتا ہے اون تمام اعمال جبریہ مین ماناگیا ہی جنمین مقادیر خواہ کسی قسم کی ہون آپسمین ضرب دی جائین

یہی مقدمہ تقسیم اعداد کی صورت مین بہی ہے وجہ اسکی یہہ ہے کہ

$$-ا \times ب = -اب$$

اسسے یہہ استخراج ہوتا ہے کہ

$$ب = \frac{-اب}{-ا}$$

اور نیز

$$-ا = \frac{-اب}{ب}$$

اول صورت سے یہہ استنباط ہوتا ہے کہ اگر ایک منفی مقدار کو دوسری منفی مقدار پر تقسیم کرین تو مثبت خارج قسمت پیدا ہوتا ہے اور دوسری صورت سے یہہ اخذ ہوتا ہے کہ جب ایک منفی مقدار کو مثبت مقدار پر تقسیم کرین تو خارج قسمت منفی ہوتا ہی

الحاصل جسطرح ضرب اور قسمت مین مقادیر آپسمین ترکیب پاتی ہین اونکے واسطے یہہ مختصر قاعدہ ہے

قاعدہ

(۱) یکسان علامتون سے + پیدا ہوتا ہے

(۲) مختلف علامتون سے − پیدا ہوتا ہے

اگر متعدد اجزاء ضربی ضرب دیئے جائین تو اونمین اگر منفی اجزاء ضربی کی تعداد جفت ہو تو حاصلضرب مثبت ہوگا اور اگر تعداد طاق ہوگی تو حاصلضرب منفی ہوگا اس قاعدہ کو قاعدہ علامات آگے لکھینگے

قوت نما

قوت نما وہ عدد ہوتا ہے جسسے یہہ معلوم ہوتا کہ ایک مقدار متواتر ضرب دینے سے کس قوت مین صعود کرتی ہی جیسے کہ $ا^۲$ کو دوسری قوت ا کی کہتے ہین اور اکثر اوسکو ا کا مربع کہتے ہین اور ۲ کو قوت نما کہتے ہین اور اسیطرح $ا^۳$ تیسری قوت ا کی یا مکعب ا کا ہی اور ۳ قوت نما ہے جس طرح سے قوا پیدا ہوتے ہین اوسنی آسانی سے سمجھہ مین آسکتا ہی کہ یہہ قوا کس

طور پر ضرب اور قسمت مین ترکیب پاتی ہین

مثلاً فرض کرو کہ $ا^{3}$ $ا^{5}$ مین ضرب دینا ہے

$$ا^{3} = ا \times ا \times ا$$

$$ا^{5} = ا \times ا \times ا \times ا \times ا$$

اسیواسطے $ا^{3} \times ا^{5} = ا \times ا \times ا \times ا \times ا \times ا \times ا \times ا = ا^{8}$

علی العموم اگر م اور ن مثبت صحیح اعداد ہون تو

$$ا^{م} \times ا^{ن} = ا^{م + ن} \qquad (۱)$$

اب فرض کرو کہ $ا^{8}$ کو $ا^{5}$ پر تقسیم کرنا ہو تو اس سبب سے کہ

$$ا^{8} = ا^{5} \times ا^{3}$$

یہہ اخذ ہوتا ہے کہ خارج قسمت مطلوب $ا^{3}$ ہے

علی العموم اگر م اور ن مثبت صحیح ہون اور م بڑا بہ نسبت ن کے ہو تو

$$\frac{ا^{م}}{ا^{ن}} = ا^{م - ن} \qquad (۲)$$

یہہ نتایج عظیمہ قواعد ضرب اور قسمت کے ہین اوسے یہہ مقدمہ مرتب ہوتا ہی کہ

مقدمہ

(۱) دو قوتون کے حاصل ضرب کا قوت نما برابر مضروب اور مضروب فیہ کے قوت نماؤن کے مجموعہ کے ہوتا ہے،

(۲) دو قوتون کے خارج قسمت کا قوت نما برابر مقسوم اور مقسوم علیہ کی قوت نماؤن کے فرق کی ہوتا ہے،

مساواتون (۱) اور (۲) یہہ نتایج عظیمہ مستنبط ہوتی ہین

اگر م = ن تو مساوات (۱) سے یہہ استخراج ہوگا کہ

$$ا^{م} \times ا^{م} = (ا^{م})^{2} = ا^{2م}$$

اور پھر $ا^{م} \times ا^{م} \times ا^{م} = (ا^{م})^{3} = ا^{3م}$

اور علی العموم یہہ نتایج پیدا ہونگے

نتیجہ اول کسی رقم کا صعود کسی قوت کا اس طرح حاصل ہوتا ہی کہ اوسکے قوت نما کو اوس قوت کے قوت نما مین ضرب دین

اب اسکا عکس کرو تو یہہ نتیجہ حاصل ہوگا

نتیجہ ۲ کسی رقم کا نزول کسی مرتبہ کا اس طرح حاصل ہوتا ہی کہ اوس رقم کی قوت نما کو اس

نزول مطلوب کے قوت نما پر تقسیم کرو

اگر م = ن تو مساوات (۲) مین

$$\frac{ا^{م}}{ا^{م}} = ا^{م-م}$$

یعنی ۱ = $ا^{۰}$

نتیجہ ۳ جس رقم کا قوت نما صفر ہو وہ واحد کے برابر ہوتی ہے

+ اور – کے باب مین جو دفعہ لکھی ہے اوسے ظاہر ہوتا ہے کہ کسی منفی مقدار کی تمام جفت قوتین مثبت ہوتی ہین اور کسی منفی مقدار کی تمام طاق قوتین منفی ہوتی ہین ۔

مثالین

(۱) $ا^{۱۰}$ اور $ا^{۳}$ کا حاصل ضرب کیا ہے جواب $ا^{۱۳}$

(۲) $ا^{۱۰}$ اور $ا^{۳}$ کا خارج قسمت کیا ہے جواب $ا^{۷}$

(۳) حاصلضرب متواتر $ا^{۴}$ و $ا^{۷}$ و $ا^{۱۱}$ و $ا^{۲}$ کا کیا ہے جواب $ا^{۲۴}$

(۴) – ا کی چوتھی قوت اور ا کی ساتوین قوت کا حاصلضرب دریافت کرو

چونکہ $(-ا)^{۴} = ا^{۴}$ اور $(-ا)^{۷} = -ا^{۷}$ جواب $-ا^{۱۱}$

(۵) $ا^{۱۲}$ کو $ا^{۷}$ مین ضرب دیکر $ا^{۹}$ پر تقسیم کرین تو کیا خارج قسمت پیدا ہوگا جواب $ا^{۱۰}$

(۶) $(-ا)^{۱۰} \times (-ا)^{۱۵} \times ا^{۲۴}$ تقسیم کیا گیا $ا^{۲}$ اور $(-ا)^{۳}$ کے حاصلضرب پر کی قیمت بناؤ

جواب $ا^{۴۴}$

(۷) $لا^{۲}\,ی^{۳}$ اور $لا^{۳}\,ی^{۲}$ کا حاصلضرب بناؤ جواب $لا^{۵}\,ی^{۵}$

(۸) $لا^{۴}\,ی^{۴}$ اور $لا^{۳}\,ی^{۳}$ کا خارج قسمت بناؤ جواب لا ی

(۹) $لا^{۶}$ کی پانچوین قوت دریافت کرو جواب $لا^{۳۰}$

(۱۰) $۲\,لا^{۳}\,ی^{۳}$ کی چوتھی قوت دریافت کرو جواب $۱۶\,لا^{۱۲}\,ی^{۱۲}$ ۔

(۱۱) ۶۴ لا^۱۲ ی^۶ کی جذر المکعب دریافت کرو جواب ۴ لا^۴ ی^۲

(۱۲) ۱۰ لا^۶ کی تیسری قوت کو دس لاکھہ گنی لا^۱۲ کے جذر پر تقسیم کرنے سے کیا خارج قسمت نکلے کا جواب ۱

ضرب

ضرب جبریہ کی تین حالتین ہوتی ہین

اول مضروب اور مضروب فیہ دونو یک رقمی ہون

دوم مضروب فیہ یک رقمی ہو اور مضروب کثیر الارقام ہو

سوم مضروب اور مضروب فیہ دونو کثیر الارقام ہون

مضروب اور مضروب فیہ دونو یک رقمی ہین

قاعدہ

(۱) اگر کوئی حرف یا حروف مضروب اور مضروب فیہ دونون مین مشترک ہون تو جمع کی موافق اونکی قوت نماؤنکو جمع کرو اور جو اسطرح حاصل جمع یا حاصل جمع دریافت ہون اونکو حاصلضرب کا قوت نما بناؤ

(۲) اور اس ماحصل کے ساتھہ اور اجزاء ضربی کو علامت ضرب کے ساتھہ لکھدو اور قاعدہ علامات محفوظ خاطر رکھو

ماحصل حاصل ضرب مطلوب ہوگا

مثالین

(۱) ۵ لا کو ۷ لا^۲ مین ضرب دو جواب ۳۵ لا^۳

(۲) − اب ^۲ کو ح د ^۴ مین ضرب دو جواب − اب ح د ^۶

(۳) − ۵ لا اور − م لا^۲ اور ۲ ع لا^۵ کو اپسمین ضرب دو جواب ۱۰ م ع لا^۸

امثلہ مشق ۴

حاصلضرب دریافت کرو

(۱) ۲ لا^۲ اور ۳ لا ر کا (۲) − ۳ لا ی اور ۶ لا^۲ ی کا

(۳) اب لا اور اح ی اور ۳ ح ی کا (۴) − م لا و − لا ی اور ۳ ع ی کا

(۵) ا لا ی اور – ب ی ی اور – ح ی لا کا (۶) آن لا ی اور ب ا لا ی اور – ح ب لا کا

مضروب کثیر الارقام اور مضروب فیہ یک رقمی کا

قاعدہ

(۱) مضروب کی ہر رقم کو مضروب فیہ مین ضرب دو

(۲) حواصل ضرب کو مناسب علامتین اونکی اول لکھکر کسی ترتیب سی لکھدو ماحصل حاصل ضرب مطلوب ہوگا

مثالین

(۱) ۲ لا – ۳ ی + ۴ ی کو ۵ لا مین ضرب دو

۲ لا – ۳ ی + ۴ ی

۵ لا

۱۰ لا – ۱۵ لا ی + ۲۰ لا ی

(۲) ا لا ی + ب لا ی – ح ی کو – ا ب ح لا ی ی مین ضرب دو

ا لا ی + ب لا ی – ح ی ی

– ا ب ح لا ی ی

– ا ب ح لا ی ی – ا ب ح لا ی ی + ا ب ح لا ی ی

امثلہ مشق ۵

حواصل ضرب دریافت کرو

(۱) ا لا + ب ی + ح ی اور م مر کا (۲) آ لا ی – ا ب لا ی اور ح لا ی کا

(۳) ۳ لا ی – ۴ لا ی + ۳ لا ی اور ۳ ا لا کا (۴) لا – لا ی + ی اور لا کا

(۵) ۱۳ لا ی – ۱۵ ی + ۳ اور – ۳ ی کا

دونو مضروب اور مضروب فیہ کثیر الارقام ہین

قاعدہ

(۱) مضروب اور مضروب فیہ کو کسی حرف کے قواء کے موافق بالترتیب ایک کو ماتحت دوسرے کے لکھو

(۲) مضروب کی ہر رقم کو مضروب فیہ کی اول رقم مین ضرب دو اور پہر دوسری رقم مین ضرب اور پہر تیسری مین اور علی ہذا القیاس

(۳) جو یہہ متعدد ماحصل حاصل ہونگے اونکو جمع کرو یہہ حاصل جمع حاصل ضرب مطلوب ہوگا

مثالین

(۱) ۳لا^{۳} − ۲لا^{۲} + ۴لا + ۲ کو ۲لا^{۲} + ۴لا − ۳ مین ضرب دو

۳لا^{۳} − ۲لا^{۲} + ۴لا + ۲
۲لا^{۲} + ۴لا − ۳

۶لا^{۵} − ۴لا^{۴} + ۸لا^{۳} + ۴لا^{۲}
۱۲لا^{۴} − ۸لا^{۳} + ۱۶لا^{۲} + ۸لا
− ۹لا^{۳} + ۶لا^{۲} − ۱۲لا − ۶

۶لا^{۵} + ۸لا^{۴} − ۹لا^{۳} + ۲۶لا^{۲} − ۴لا − ۶

(۲) ا لا^{۲} − ب لا د + ج د^{۲} کو م لا + ن د − ۱ مین ضرب دو

ا لا^{۲} − ب لا د + ج د^{۲}
م لا + ن د − ۱

م ا لا^{۳} − م ب لا^{۲} د + ج م لا د^{۲}
+ ا ن لا^{۲} د − ب ن لا د^{۲} + ج ن د^{۳}
− ا لا^{۲} + ب لا د − ج د^{۲}

م ا لا^{۳} + (ا ن − م ب) لا^{۲} د + (ج م − ب ن) لا د^{۲} + ج ن د^{۳} − ا لا^{۲} + ب لا د − ج د^{۲}

(۳) لا^{۳} + لا^{۲} د + لا د^{۲} + د^{۳} کو لا − د مین ضرب دو

لا^{۳} + لا^{۲} د + لا د^{۲} + د^{۳}
لا − د

لا^{۴} + لا^{۳} د + لا^{۲} د^{۲} + لا د^{۳}
− لا^{۳} د − لا^{۲} د^{۲} − لا د^{۳} − د^{۴}

لا^{۴} − د^{۴}

(۴) لا^{۲} + د^{۲} + ی^{۲} کو لا + د + ی مین ضرب دو

لا^{۲} + د^{۲} + ی^{۲}
لا + د + ی

لا^{۳} + لا د^{۲} + لا ی^{۲}
+ د لا^{۲} + د^{۳} + د ی^{۲}
+ ی لا^{۲} + ی د^{۲} + ی^{۳}

لا^{۳} + د^{۳} + ی^{۳} + لا د^{۲} + د لا^{۲} + لا ی^{۲} + ی لا^{۲} + د ی^{۲} + ی د^{۲}

اس حاصل ضرب مین تمام جو اصل ضرب جبریہ مین مقادیر غیر متماثلہ ہین اور آخر ما حصل مین ارقام متعددہ ہین

جو اپنی علامتوں سمیت کسی ترتیب سے لکھی گئی ہیں ایسی صورتوں میں ہمیشہ اس طرح حاصل ضرب کو لکھنا چاہیے
کہ ایک اونمیں قرینہ اور ترتیب پائی جاسکے

امثلہ مشق ۶

	مضروب	مضروب فیہ
(۱)	۲لا^{2} + لا + ۱	۴لا − ۳
(۲)	۲لا^{2} − لا + ۱	لا^{2} − لا + ۱
(۳)	لا^{2} − لا د + د^{2}	لا + د
(۴)	ا لا^{3} + ب لا^{2} + ح لا + د	لا^{2} + لا + ۱
(۵)	ا^{4} − ا ب^{3} + ب^{4}	ا + ب + ۱
(۶)	ا^{2} + ۲ ا لا + لا^{2}	ا^{2} + ۳ ا لا − لا^{2}
(۷)	۱۲لا^{2} − ا لا + ۱۰ ا^{2}	۳لا^{2} + ا لا + ا^{2}
(۸)	لا^{5} + لا^{4} د − لا د^{4} − د^{5}	لا − د
(۹)	لا^{4} − ۲لا^{2} + ۱	لا^{3} + لا + ۱
(۱۰)	۷لا^{5} − ۵لا^{2} + ۲	۳لا^{3} + ۲لا^{2} − ۷لا + ۱
(۱۱)	لا^{5} + ۲لا^{4} − ۳لا^{3} + ۷لا − ۳	۲لا^{2} + ۵لا − ۴
(۱۲)	۱ + م لا − ن لا^{2}	۱ − م لا + ن لا^{2}
(۱۳)	ا لا^{2} − ب د لا + ح د^{2}	م لا − ن د
(۱۴)	لا^{2} + ۳لا − ۱	لا^{2} − ۳لا + ۱
(۱۵)	ا لا + ب د + ۱	ع لا + ق د + ۱

اب ہم چند مقدمات علمیہ لکھتے ہیں ضرب جبریہ کی ترکیبوں میں جو اکثر واقع ہوتے ہیں

مقدمہ ۱

دو مقداروں کے مجموعہ کا مربع برابر ہوتا ہے اونکے مربعوں کے مجموعہ مع دوچند حاصل ضرب کے فرض کرو کہ ا اور ب
دو مقداریں ہیں تو ا + ب

ا + ب

ا^{2} + ا ب

+ ا ب + ب^{2}

ا^{2} + ۲ ا ب + ب^{2}

اسیواسطے $(\text{ا} + \text{ب})^2 = \text{ا}^2 + ۲\,\text{اب} + \text{ب}^2$

مقدمہ ۲

دو مقداروں کے فرق کا مربع برابر ہوتا ہے اونکی مربعوں کے مجموعہ منفی اونکی دو چند حاصل ضرب کے

فرض کرو کہ ا اور ب دو مقداریں ہوں تو

$$\begin{array}{r} \text{ا} - \text{ب} \\ \text{ا} - \text{ب} \\ \hline \text{ا}^2 - \text{اب} \\ - \text{اب} + \text{ب}^2 \\ \hline \text{ا}^2 - ۲\,\text{اب} + \text{ب}^2 \end{array}$$

اسیواسطے $(\text{ا} - \text{ب})^2 = \text{ا}^2 - ۲\,\text{اب} + \text{ب}^2$

مقدمہ ۳

دو مقداروں کے مجموعہ اور فرق کا حاصلضرب برابر ہوتا ہے اونکے مربعوں کے فرق کے

فرض کرو کہ ا و ب دو مقداریں ہوں تو

$$\begin{array}{r} \text{ا} + \text{ب} \\ \text{ا} - \text{ب} \\ \hline \text{ا}^2 + \text{اب} \\ - \text{اب} - \text{ب}^2 \\ \hline \text{ا}^2 - \text{ب}^2 \end{array}$$

اسیواسطے $(\text{ا} + \text{ب})(\text{ا} - \text{ب}) = \text{ا}^2 - \text{ب}^2$

مقدمہ ۴

دو مقداروں کے مجموعہ کا مکعب برابر ہوتا ہے اونکے مکعبوں کے مجموعہ مع سہ چند حاصل ضرب اونکے مجموعہ اور حاصلضرب کے

فرض کرو کہ ا و ب مقادیر ہوں اور مربع ا + ب کا ا + ب میں ضرب دیا جاوے

$$ا^2 + ٢اب + ب^2$$
$$ا + ب$$
$$ا^3 + ٢ا^2ب + اب^2$$
$$ا^2ب + ٢اب^2 + ب^3$$
$$ا^3 + ٣ا^2ب + ٣اب^2 + ب^3$$

اسیواسطے

$$(ا+ب)^3 = ا^3 + ٣ا^2ب + ٣اب^2 + ب^3$$

یعنی جملے کی دو اوسط کی رقموں مین اب کے اشتال جمع کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$(ا+ب)^3 = ا^3 + ٣اب(ا+ب) + ب^3$$

مقدمہ ٥

دو مقداروں کے فرق کا کعب برابر ہوتا ہا اونکی کعبوں کے مجموعہ منفی سہ چند حاصلضرب اونکے فرق اور حاصلضرب کے

اگر مقادیر ا اور ب ہوں تو موافق اخر مقدمہ کے ثابت ہوسکتا ہی کہ

$$(ا-ب)^3 = ا^3 - ٣ا^2ب + ٣اب^2 - ب^3$$

تراکیب مفصلہ ذیل بہی اکثر واقع ہوتی ہین

$$(لا+ا)(لا+ب) = لا^2 + (ا+ب)لا + اب \quad (١)$$
$$(لا+ا)(لا-ب) = لا^2 + (ا-ب)لا - اب \quad (٢)$$
$$(لا-ا)(لا+ب) = لا^2 - (ا-ب)لا - اب \quad (٣)$$
$$(لا-ا)(لا-ب) = لا^2 - (ا+ب)لا + اب \quad (٤)$$

مثالین

(١) $٤لا - ٣ی$ اور $٤لا + ٣ی$ کا حاصل ضرب کیا ہے ؟

چونکہ یہہ جملے مجموعہ اور فرق کی ہین اسلئے موافق مقدمہ ٣ کے یہہ جواب حاصل ہوگا کہ $١٦لا^2 - ٩ی^2$

(٢) $٥لا^2 - ٧ی$ کا مربع کیا ہے بموجب مقدمہ دوم جواب $٢٥لا^4 - ٧٠لا^2ی + ٤٩ی^2$

(٣) $٢لا^2 + ٤ی^2$ کا کعب کیا ہی بموجب مقدمہ چہارم کے جواب $٨لا^6 + ٢٤لا^2ی^2(٢لا^2+٤ی^2) + ٦٤ی^6$ یا $٨لا^6 + ٤٨لا^4ی^2 + ٩٦لا^2ی^4 + ٦٤ی^6$

(٤) $لا^2 + لا + ١$ اور $لا^2 - لا + ١$ کا حاصل ضرب بتاؤ

ان جملوں کو مجموعہ اور فرق $(لا^2 + ١)$ اور لا کا خیال کر سکتے ہین اسواسطے بموجب مقدمہ سوم کے

حاصلضرب (لا۲ + ۱)۲ - لا۲ ہے اور اگر پہلی رقم کی بموجب مقدمہ اول کے تشریح کریں تو وہ
لا۴ + ۲لا۲ + ۱ - لا۲ ہوگا اسیواسطے جواب لا۴ + لا۲ + ۱

(۵) ۲ی + ۵ اور ۲ی - ۷ کا حاصلضرب بتاؤ کہ کیا ہے بموجب مساوات (۲) کے
جواب ۴ی۲ - ۴ی - ۳۵

(۶) لا۲ + ۲لا + ۳ اور لا۲ + ۲لا - ۹ کا حاصل ضرب بتاؤ بموجب مساوات (۲) کے
حاصلضرب برابر ہے

(لا۲ + ۲لا)۲ - ۶ (لا۲ + ۲لا) - ۲۷

یعنی (لا۴ + ۴لا۳ + ۴لا۲) - ۶ (لا۲ + ۲لا) - ۲۷

خطوط وحدانی کو دور کرو تو

لا۴ + ۴لا۳ + ۴لا۲ - ۶لا۲ - ۱۲لا - ۲۷

جواب لا۴ + ۴لا۳ - ۲لا۲ - ۱۲لا - ۲۷

امثلہ مشق ۷

ان جملوں کے مربعے لکھو

(۱) ۲لا + ۷ی (۲) ۴لا۲ - ۳ی

(۳) ۷لا۲ - ۲لا (۴) م لا - ن ی

(۵) ۲لا۳ - ۳لا + ۱ (۶) ا لا۲ - ب لا + ج

حاصلضرب دریافت کرو

(۷) ۲لا + ۵ی اور ۲لا - ۵ی کا (۸) ۳ا لا۲ + ب ی اور ۳ا لا۲ - ب ی کا

(۹) ۵لا۲ + ۲لا + ۱ اور ۵لا۲ - ۲لا + ۱ کا

(۱۰) ۵لا۲ + ۲لا - ۱ اور ۵لا۲ + ۲لا + ۱ کا

(۱۱) لا۳ + ی۳ و لا۳ - ی۳ اور لا۶ + ی۶ کا

(۱۲) ۲لا۲ + ۱ اور ۲لا۲ - ۱ اور ۴لا۴ - ۱ کا

ان جملوں کی تحویل بطرز رقموں کے سلسلہ میں کرو

(۱۳) (لا + ۳)(لا + ۷) - ۲۱ (۱۴) (لا - ۵)(لا + ۳) + ۲لا + ۱۵

(۱۵) (ا - ۲لا)۲ + (ا + ۲لا)۲ (۱۶) ۲(لا - ی)۲ + ۳(لا + ی)(لا - ی)

(۱۷) (لا + ی)۳ - (لا - ی)۳ (۱۸) (لا۲ + ا لا)۲ - ۲ا۲ (لا۲ + ا لا)۲

قسمت

قسمت کی بہی تین صورتین ہین

اول مقسوم اور مقسوم علیہ دونو ارقام مفرد ہون

دوم مقسوم کثیر الارقام اور مقسوم علیہ رقم مفرد ہو

سوم مقسوم اور مقسوم علیہ دونو کثیر الارقام ہو

اگر مقسوم اور مقسوم علیہ دونو مفرد رقمین ہون

قاعدہ

(۱) مقسوم علیہ کو نیچے مقسوم کے کسر کیطرح لکہو اور جو اجزاء ضربی دونو مشترک ہون اوسے ساقط کرو

(۲) اگر ایک ہی حرف دونو مقسوم اور مقسوم علیہ مین ہو اور اونکی قوت نما مختلف ہون تو مقسوم علیہ کے قوت نما کو قسمت مقسوم علیہ کے قوت نما سے تفریق کرو اور باقی کو قوت نما خارج قسمت مین اوس حرف کا لکہو
ماحصل خارج ہوگا

مثالین

(۱) ۲۷ لا^۲ ڈ اور ۹ لا ڈ^۲ خارج قسمت دریافت کرو

مقسوم علیہ ۹ لا ڈ^۲ کو مقسوم ۲۷ لا^۲ ڈ کے نیچے لکہو اور اجزاء ضربی مشترک ۹ اور لا کو ساقط کرو تو جو حاصل ہوگا

۳ لا / ڈ

اور اسے بموجب قاعدہ کے جواب ۳ لا / ڈ حاصل ہوگا

(۲) ۳۶ م ر ن لا^۴ ڈ^۲ اور ۹ م لا ڈ^۲ کا خارج قسمت دریافت کرو جواب ۴ ر ن لا^۳

(۳) — ۱۰۸ ا^۳ ب^۵ ج^۶ لا^۲ ڈ^۲ ن ع اور ۳۶ ا ب ج^۳ لا ڈ ص ی ط کا خارج قسمت بناؤ
جواب — ۳ ا^۲ ب^۴ ج^۳ لا ر م — ر ن ص ی ع ط

امثلہ مشق ۸

خارج قسمت دریافت کرو

(۱) ۱۲ لا^۳ ڈ^۲ ی اور ۳ لا ی کا (۲) ۳۵ لا^۳ ڈ^۹ اور — ۴۲ لا^۲ ڈ^۲ کا

(۳) م ن ع لا^۲ ڈ اور ن لا ڈ^۳ کا (۴) — ا ب ج لا اور ع م ج لا^۲ ن کا

(۵) ۱۰۰۰ لا^۴ ڈ^۲ ی^۶ اور ۱۰۰ ی ڈ لا^۳ کا (۶) ۳۴ لا^۳ ڈ^۲ ی اور ۱۷ لا^۲ ڈ کا

اگر مقسوم کثیر الارقام اور مقسوم علیہ رقم مفرد ہو

قاعدہ

(۱) مقسوم کی ہر رقم کو مقسوم علیہ پر تقسیم کرو

(۲) خارج قسمتوں کے اول مناسب علامتیں مقرر کر کے بالترتیب لکھو حاصل خارج مطلوب ہوگا

مثالیں

(۱) ۴۸ لا^{۳} − ۱۶ لا^{۲} + ۲۴ لا کو ۸ لا پر تقسیم کرو جواب ۶ لا^{۲} − ۲ لا + ۳

(۲) ۱۵ ا لا^{۳} − ۲۵ ب لا^{۲} ی + ۳۵ ح لا ی^{۲} کو −۵ لا پر تقسیم کرو جواب −۳ ا لا^{۲} + ۵ ب لا ی − ۷ ح ی^{۲}

امثلہ مشق ۹

	مقسوم	مقسوم علیہ
(۱)	−۱۵ ا لا^{۳} ی^{۲} − ۹ ا لا^{۲} ی^{۲} + ۶ ا لا ی^{۳}	−۳ ا لا ی^{۲}
(۲)	م^{۲} ن لا^{۲} ی − م ن^{۲} لا ی^{۲}	م ن لا ی
(۳)	۳۳ لا^{۵} + ۲۲ لا^{۴} − ۱۱ لا^{۳} + ۱۱ لا^{۲}	۱۱ لا^{۲}
(۴)	ا ع لا^{۴} − ب ع لا^{۳} + ح ع لا^{۲} ی^{۲}	−ع لا^{۲}
(۵)	ا^{۲} ب^{۲} لا^{۳} ی − ا^{۲} ب^{۳} لا^{۲} ی^{۲} + ا^{۲} ب^{۲} لا ی^{۳}	ا^{۲} ب لا ی
(۶)	ا س لا$^{م+۲}$ + ا گ لا$^{م+۱}$ ی^{م}	ا لا
(۷)	−۳۰ لا^{۴} ی^{۲} + ۲۴ لا^{۵} ی^{۴} − ۱۵ لا^{۵} ی^{۴}	−۶ لا^{۳} ی^{۲}
(۸)	ا^{۲} ب لا$^{۲م+ن}$ + ا ب^{۲} لا$^{م+۲ن}$	ا ب لا$^{م+ن}$
(۹)	لا$^{م+۲}$ ی^{۳} − لا^{۳} ی$^{م+۱}$ + لا^{۲} ی^{۲}	−لا^{۲} ی^{۲}
(۱۰)	۸ لا^{۳} ی − ۱۲ لا^{۵} ی^{۲} + ۱۶ لا^{۴} ی^{۳} − ۲۰ لا^{۳} ی^{۳}	۴ لا^{۳} ی

مقسوم اور مقسوم علیہ دونو کثیر الارقام ہوں

(۱) مقسوم اور مقسوم علیہ دونو کو ایک حرف کے قوا کے موافق اس ترتیب سے لکھو کہ قوا بتدریج بڑہتی جائیں یا گہٹتی جائیں (جس ترتیب میں قوا بڑہتی جاتی ہیں اوسکو ترتیب تصاعدی کہتے ہیں اور جسمیں قوا گہٹتی جائیں اوسے ترتیب تنازلی)

(٢) مقسوم کی اول رقم کو مقسوم علیہ کی اول رقم پر تقسیم کرو خارج قسمت جو اسطرح حاصل ہوگا وہ اول رقم خارج قسمت کی ہوگی

(٣) اس رقم کو مقسوم علیہ مین ضرب دو اور حاصلضرب کو مقسوم مین سے تفریق کرو اور جسقدر رقمون کی ضرورت ہو انکو باقی کے ساتہہ مقسوم مین سے اتار لو

(٤) اس باقی کو مقسوم بناکر پہلے عمل کو دوبارہ کام مین لاؤ تاکہ دوسری رقم خارج قسمت کی اور باقی جدید حاصل ہو اور علی ہذا القیاس اس عمل کو یہانتک جاری رکہو کہ کوئی رقم مقسوم کی باقی نہ رہے اور باقی صفر رہے اور اگر یہہ ممکن ہو تو خارج قسمت مین کافی رقمین نکالین

مثالین

(١) $٦\,\text{لا}^{٣} - ٥\,\text{لا}^{٢} - ٣\,\text{لا} + ٢$ کو $٣\,\text{لا} + ٢$ پر تقسیم کرو

$$٣\,\text{لا} + ٢ \;)\; ٦\,\text{لا}^{٣} - ٥\,\text{لا}^{٢} - ٣\,\text{لا} + ٢ \;(\; ٢\,\text{لا}^{٢} - ٣\,\text{لا} + ١$$

$$٦\,\text{لا}^{٣} + ٤\,\text{لا}^{٢}$$

$$-\,٩\,\text{لا}^{٢} - ٣\,\text{لا}$$

$$-\,٩\,\text{لا}^{٢} - ٦\,\text{لا}$$

$$٣\,\text{لا} + ٢$$

$$٣\,\text{لا} + ٢$$

یہی نتیجہ حاصل ہوتا اگر ہم مقسوم اور مقسوم علیہ دونو کو بہ ترتیب تنازلی قوای لا کی لکہی

$$٢ + ٣\,\text{لا} \;)\; ٢ - ٣\,\text{لا} - ٥\,\text{لا}^{٢} + ٦\,\text{لا}^{٣} \;(\; ١ - ٣\,\text{لا} + ٢\,\text{لا}^{٢}$$

$$٢ + ٣\,\text{لا}$$

$$-\,٦\,\text{لا} - ٥\,\text{لا}^{٢}$$

$$-\,٦\,\text{لا} - ٩\,\text{لا}^{٢}$$

$$٤\,\text{لا}^{٢} + ٦\,\text{لا}^{٣}$$

$$٤\,\text{لا}^{٢} + ٦\,\text{لا}^{٣}$$

اکثر جملونکو موافق ترتیب تصاعدی کے لکہنا تسہیل عمل کے لئے بکار آمد ہوتا ہے

(٢) $\text{لا}^{٥} - \text{ی}^{٥}$ کو $\text{لا} - \text{ی}$ پر تقسیم کرو

	مقسوم	مقسوم علیہ
(۳)	لا^{3} + ۱	لا + ۱
(۴)	ا^{3} − ب^{3} − ج^{3} − ۳ ب ج	ا − ب − ج
(۵)	ا^{4} − ۳ ب^{4} − ۲ ب^{2} ا^{2} + ا^{2} + ب	ا^{2} + ب^{2}
(۶)	لا^{4} + ۲ ن لا^{2} − م^{2} لا^{2} + ن^{2}	لا^{2} + م لا + ن
(۷)	لا^{4} + م^{3} لا − ۲ م ن لا + م^{2} ن − ن^{2}	لا^{2} + م لا + ن
(۸)	ا^{4} + ۲ ا^{2} ب^{2} + ۹ ب^{4}	ا^{2} + ۲ ا ب + ۳ ب^{2}
(۹)	لا^{8} + لا^{4} − ۲	لا^{4} + ۲ لا^{2} + ۲
(۱۰)	لا^{3} + د^{3} + ی^{3} − ۳ لا د ی	لا + د + ی

جب مقسوم اور مقسوم علیہ قوار متنازلہ کے موافق لکھی جائیں تو اس بات کا خیال رکھنا چاہئے کہ ہر باقی اپنی ماقبل کی باقی سے درجہ میں چھوٹی ہو اس صورت میں یہہ ممکن ہی کہ عمل تقسیم کا جاری رہے جب تک کہ باقی ایسے حاصل ہو کہ وہ مقسوم علیہ سے درجہ میں ادنی ہو اسکی مثالیں ذیل میں دیکھو

مثالیں

(۱) ۱۰ لا^{3} + ۷ لا^{2} − ۸ لا + ۱۴ کو ۲ لا + ۳ پر تقسیم کرو

۲ لا + ۳) ۱۰ لا^{3} + ۷ لا^{2} − ۸ لا + ۱۴ (۵ لا^{2} − ۴ لا + ۲

۱۰ لا^{3} + ۱۵ لا^{2}

−۸ لا^{2} − ۸ لا

−۸ لا^{2} − ۱۲ لا

۴ لا + ۱۴

۴ لا + ۶

باقی = ۸

(۲) لا^{2} + ع لا + ق کو لا − ا پر تقسیم کرو

لا − ا) لا^{2} + ع لا + ق (لا + ا + ع

لا^{2} − ا لا

(ا + ع) لا + ق

(ا + ع) لا − ا (ا + ع)

ا (ا + ع) + ق

باقی = ا^{2} + ع ا + ق

(۳) لا^{3} + ع لا^{2} + ق لا + ر کو لا − ا پر تقسیم کرو

(لا − ا) لا^{3} + ع لا^{2} + ق لا + ر (لا^{2} + (ا + ع) لا + (ا^{2} + اع + ق)

لا^{3} − ا لا^{2}

(ا + ع) لا^{2} + ق لا

(ا + ع) لا^{2} − ا (ا + ع) لا

(ا^{2} + اع + ق) لا + ر

(ا^{2} + اع + ق) لا − ا (ا^{2} + اع + ق)

ا (ا^{2} + اع + ق) + ر

باقی = ا^{3} + ع ا^{2} + ق ا + ر

ان تمام مثالوں میں باقی جو حاصل ہوتی ہی اسکو کچھ لگاو لا سے نہیں ہوتا

(۴) لا^{5} − لا^{4} − ۲ لا^{3} + ۵ لا^{2} − ۲ لا + ۳ کو لا^{2} − ۲ لا + ۱ پر تقسیم کرو

(لا^{2} − ۲ لا + ۱) لا^{5} − لا^{4} − ۲ لا^{3} + ۵ لا^{2} − ۲ لا + ۳ (لا^{3} + لا^{2} − لا + ۲

لا^{5} − ۲ لا^{4} + لا^{3}

لا^{4} − ۳ لا^{3} + ۵ لا^{2}

لا^{4} − ۲ لا^{3} + لا^{2}

− لا^{3} + ۴ لا^{2} − ۲ لا

− لا^{3} + ۲ لا^{2} − لا

۲ لا^{2} − لا + ۳

۲ لا^{2} − ۴ لا + ۲

۳ لا + ۱ − باقی

باقی ۳ لا + ۱ اول درجہ کی ہی اور مقسوم علیہ سے ایک درجہ کم ہے

(۵) لا^{6} + ۵ لا^{4} + ۸ کو لا^{3} − لا + ۱ پر تقسیم کرو

(لا^{3} − لا + ۱) لا^{6} + ۵ لا^{4} + ۸ (لا^{3} + لا^{2} − لا^{2} + ۶ لا − ۲

لا^{6} − لا^{4} + لا^{3}

لا^{5} − لا^{3} + ۵ لا^{4}

لا^{5} − لا^{3} + لا^{2}

− لا^{4} + ۶ لا^{4} − لا^{2}

− لا^{4} + لا^{2} − لا

۶ لا^{3} − ۲ لا^{2} + لا

۶ لا^{3} − ۶ لا^{2} + ۶ لا

− ۲ لا^{3} + ۷ لا^{2} − ۶ لا + ۸

− ۲ لا^{3} + ۲ لا − ۲

۷ لا^{2} − ۸ لا + ۱۰ = باقی

باقی دوسری درجہ کی ہی اور مقسوم علیہ سے ایک درجہ کم ہی

امثلہ مشق ۱۱

	مقسوم	مقسوم علیہ
(۱)	۳لا^{3} − ۳لا^{2} + ۸لا + ۲	۲لا + ۱
(۲)	لا^{4} + ا^{4}	لا + ا
(۳)	لا^{3} − ا^{3}	لا + ا
(۴)	لا^{4} + م لا^{3} + لا^{2} + م^{2} لا + م^{2}	لا^{2} − م لا + ۱
(۵)	۲لا^{4} + ۳ د لا^{3} + ۳ د^{2} لا^{2} + ۳ د^{3} لا + د^{4} + ۲ د^{5}	۲لا + د
(۶)	۲لا^{5} − ۲لا^{4} + ۹ لا^{3}	۲لا^{3} + لا + ۱
(۷)	د لا^{6} + ۲ د^{2} لا^{5} + د^{3} لا^{4} + د^{6} لا	لا^{4} + د لا^{3} + د^{3} لا + د^{4}
(۸)	لا^{3} + ۳ ا لا^{2}	لا^{2} + ۲ ا لا + ا^{2}
(۹)	۲لا^{5} + ۲لا^{4} + ۵ لا^{3}	لا^{3} + لا^{2} + لا + ۱
(۱۰)	لا^{3} + د^{3} + لا د^{2} + د لا^{2} + لا د ی + ی لا^{2} + د ی^{2} + ی د^{2}	لا + د + ی

جملوں کی تشریح

الجبرا کے مطالب عظیمہ میں سے یہہ بات بھی ہے کہ جملوں کی تشریح ایسی سلسلوں میں کریں کہ ان میں ارقام مفردہ علامات + اور − کے ساتھہ شامل ہوں اسکو جملوں کا پہلانا بھی کہتے ہیں بعض اوقات ان سلسلوں کی رقموں کی تعداد متناہی ہوتی ہی اور بعض اوقات انکی رقموں کی تعداد غیر متناہی ہوتی ہی بہت سی جملوں کی تشریح قواعد ضرب اور قسمت سی ہو سکتی ہی اسکی توضیح کے واسطے ذیل میں مثالیں لکھی جاتی ہیں

مثالیں

(۱) جملہ (ا + لا)^{3} کی تشریح کرو

مربع (ا + لا) کا ا^{2} + ۲ا لا + لا^{2} ہی اسکو ا + لا میں ضرب دو تو یہہ جواب حاصل ہوگا

ا^{3} + ۳ا^{2} لا + ۳ ا لا^{2} + لا^{3}

(۲) $(ا + لا)^{۴}$ کی تشریح کرو

(ا+لا) کی تشریح جو اوپر کے سوال میں ہوئی اوسکو ا + لا میں ضرب دو تو یہہ جواب حاصل ہوگا

$ا^{۴} + ۴ا^{۳}لا + ۶ا^{۲}لا^{۲} + ۴الا^{۳} + لا^{۴}$

(۳) $(ا + ب + ح)^{۲}$ کی تشریح کرو

ضرب سے یہہ جواب حاصل ہوگا کہ $ا^{۲} + ب^{۲} + س^{۲} + ۲اب + ۲اس + ۲ب س$

اور یہی حاصل اسطرح بہی حاصل ہو سکتا ہی کہ ب اور س کو خطوط وحدانی میں لکہو اور پہر بموجب مقدمہ صفحہ ۲۲ کے عمل کرو

$(ا + ب + ح)^{۲} = ا^{۲} + ۲ا(ب + ح) + (ب + ح)^{۲}$

$= ا^{۲} + ۲اب + ۲اح + ب^{۲} + ۲ب ح + ح^{۲}$

(۴) $(ا + ب + ح + د + وغیرہا)^{۲}$ کی تشریح کرو

اخر مثال کی طرح عمل کرنے سے

$(ا + ب + ح + د + وغیرہا)^{۲} = ا^{۲} + ۲ا(ب + ح + د + وغیرہ) + (ب + ح + د + وغیرہ)^{۲}$

اور اسیطرح

$(ب + ح + د + وغیرہ)^{۲} = ب^{۲} + ۲ب(ح + د + وغیرہا) + (ح + د + وغیرہا)^{۲}$

اور س + د وغیرہا کے واسطے ان سا واتون سی یہہ مقدمہ مرتب ہوتا ہی

مقدمہ

جملہ کثیر الارقام کا مربع برابر ہوتا ہی ہر رقم کے مربعوں کے مجموعہ اور دو چند حاصل ضرب ہر ایک رقم اور اوسکی مابعد کی رقموں کے مجموعہ کے

(۵) $(ا + ۲لا + ۳لا^{۲})^{۲}$ کی تشریح کرو

بموجب اس مقدمہ کے

$(ا + ۲لا + ۳لا^{۲})^{۲} = ا + ۴لا + ۶لا^{۲} + ۴لا^{۲} + ۱۲لا^{۳} + ۹لا^{۴}$

جواب $ا + ۴لا + ۱۰لا^{۲} + ۱۲لا^{۳} + ۹لا^{۴}$

(۶) $(ا - ۲لا + ۳لا^{۲} - ۴لا^{۳})^{۲}$

بموجب اس مقدمہ کے تشریح اوسکی یہہ ہوگی

$ا - ۴لا + ۶لا^{۲} - ۸لا^{۳} + ۴لا^{۲} - ۱۲لا^{۳} + ۱۶لا^{۴} + ۹لا^{۴} - ۲۴لا^{۵} + ۱۶لا^{۶}$

جواب ۱ − ۴ لا + ۱۰ لا^{۲} − ۳۰ لا^{۳} + ۳۵ لا^{۴} − ۲۴ لا^{۵} + ۱۶ لا^{۶}

امثلہ مشق ۱۲

ان جملون کی تشریحات لکھو

(۱) (۱ − ۲ لا)^{۲} (۲) (۲ لا − ی)^{۳}

(۳) (ا + ب − ح − د)^{۲} (۴) (۲ لا + ۳ ی − ۱)^{۲}

(۵) (لا^{۵} + لا^{۴} + لا^{۳} + لا^{۲} + لا + ۱)^{۲} (۶) (۱ + ۴ لا^{۲} + ۹ لا^{۴} + ۱۶ لا^{۶})^{۲}

(۷) (۱ − ۲ لا + لا^{۲})^{۳} (۸) (۱ + لا + لا^{۲})^{۳}

(۹) (لا + ء + ی)^{۳} (۱۰) (لا − ء + ی − ۱)^{۲}

امثلہ ذیل مین تشریح عمل قسمت سے ہوتی ہی تعداد ارقام کی غیر متناہی ہی مگر ان مین ایک خاص قانون پایا جاتا ہے

(۱) $\frac{۱}{۱-\text{لا}}$ کی تشریح ایسی سلسلہ ارقام مین کرو جسمین لا کی قوائے متصاعدہ واقع ہون

تقسیم (۱ − لا) ۱ (۱ + لا + لا^{۲} + لا^{۳} + وغیرہما

۱ − لا

لا

لا − لا^{۲}

لا^{۲}

لا^{۲} − لا^{۳}

لا^{۳}

لا^{۳} − لا^{۴}

لا^{۴} وغیرہما

جواب ۱ + لا + لا^{۲} + لا^{۳} + وغیرہما

(۲) $\frac{۱}{(۱-\text{لا})^{۲}}$ کی تشریح کرو

مقسوم علیہ (۱ − لا)^{۲} کو پھیلاؤ اور موافق قاعدہ قسمت کی عمل کرو

(۱ − ۲ لا + لا^{۲}) ۱ (۱ + ۲ لا + ۳ لا^{۲} + ۴ لا^{۳} + وغیرہما

۱ − ۲ لا + لا^{۲}

۲ لا − لا^{۲}

۲ لا − ۴ لا^{۲} + ۲ لا^{۳}

۳ لا^{۲} − ۲ لا^{۳}

۳ لا^{۲} − ۶ لا^{۳} + ۳ لا^{۴}

۴ لا^{۳} − ۳ لا^{۴}

۴ لا^{۳} − ۸ لا^{۴} + ۴ لا^{۵}

۵ لا^{۴} − ۴ لا^{۵} وغیرہ

جواب ١ + ٢ لا + ٣ لا^{٢} + ٤ لا^{٣} + وغیرہما

امثلہ مشق ١٣

ان جملون کو قوای متصاعدہ لا مین پہیلا کر لکھو

(١) ١ ÷ (١ + لا + لا^{٢})   (٢) (١ + لا^{٣}) ÷ (١ − لا)   (٣) (١ + ٢ لا + ٣ لا^{٢}) ÷ (١ + لا)

(٤) (١ + لا + لا^{٢}) ÷ (١ + ٤ لا)^{٢} (٥) (١ − ٢ لا)^{٢} ÷ (١١ + ٣ لا)^{٢} (٦) (١ + م لا) ÷ (١ − ن لا)

(٧) (ا + ب لا + س لا^{٢} + د لا^{٣} + وغیرہما) ÷ (١ − ب لا)

ضابطہ جملہ ثنائی

جملہ ثنائی (لا + ی) کے قوای موافق قواعد ضرب کے یہہ حاصل ہونگے کہ

(لا + ی)^{٢} = لا^{٢} + ٢ لا ی + ی^{٢}

(لا + ی)^{٣} = لا^{٣} + ٣ لا^{٢} ی + ٣ لا ی^{٢} + ی^{٣}

(لا + ی)^{٤} = لا^{٤} + ٤ لا^{٣} ی + ٦ لا^{٢} ی^{٢} + ٤ لا ی^{٣} + ی^{٤}

(لا + ی)^{٥} = لا^{٥} + ٥ لا^{٤} ی + ١٠ لا^{٣} ی^{٢} + ١٠ لا^{٢} ی^{٣} + ٥ لا ی^{٤} + ی^{٥}

(لا + ی)^{٦} = لا^{٦} + ٦ لا^{٥} ی + ١٥ لا^{٤} ی^{٢} + ٢٠ لا^{٣} ی^{٣} + ١٥ لا^{٢} ی^{٤} + ٦ لا ی^{٥} + ی^{٦}

ان تشریحات مین ایسا تسلسل ارقام ہی کہ اونمین لا کی قوای متنازلہ اور ی کی قوای متصاعدہ اور اونکی امثال قاعدہ ذیل کے موافق حاصل ہو سکتی ہین

قاعدہ

(١) جس قوت مین اوٹہانا منظور ہو اوسکو جو عدد تعبیر کرتا ہو اوسے شروع کرکے بہ ترتیب ایک ایک کم کرکے لکھو

(٢) اور اونکے نیچے پیچہین امثال کے واسطے جگہہ چہوڑ کر مسلسل اعداد ا و ٢ و ٣ وغیرہما لکھو

(٣) اول امثال ایک ہے دوسرا امثال اسطرح حاصل ہوتا ہی کہ اول امثال پر جو عدد لکہا ہو اوسکو اوس امثال مین ضرب دو اور حاصل ضرب کو اوس عدد پر تقسیم کرو جو امثال کے نیچے لکہا ہوا ہو اور جسطرح دوسرا امثال پہلے امثال سے حاصل کیا تہا اسیطرح تیسرا امثال دوسرے امثال سے حاصل کرو اور چوتہی کو تیسرے سے اور علی ہذا القیاس

بس جو اعداد اسطرح حاصل ہونگی وہ امثال مطلوب ہونگے اور جملہ باقی کی تشریح کی علامات + اور − باری باری آینگی یعنی ایک دفعہ + دوسری دفعہ −

مثالین

(١) $(\text{لا} + \text{ی})^{7}$ کی تشریح لکہو

بموجب قاعدہ کے عمل کرنے سے اوپر اور نیچے کی سطرون کو اسطرح لکہین

٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١

$\frac{1}{1}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{21}{3}$ $\frac{35}{4}$ $\frac{35}{5}$ $\frac{21}{6}$ $\frac{7}{1}$ ١

بیچ کی سطر کے اعداد بموجب (٣) قاعدہ مذکور کے اشال مطلوب ہین اسواسطے جواب یہہ ہے کہ

$\text{لا}^{7} + 7\,\text{لا}^{6}\text{ی} + 21\,\text{لا}^{5}\text{ی}^{2} + 35\,\text{لا}^{4}\text{ی}^{3} + 35\,\text{لا}^{3}\text{ی}^{4} + 21\,\text{لا}^{2}\text{ی}^{5} + 7\,\text{لا}\,\text{ی}^{6} + \text{ی}^{7}$

(٢) $(\text{لا} + \text{ی})^{9}$ کے اشال کو حاصل کرو

٩ ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١

١ ٩ ٣٦ ٨٤ ١٢٦ ١٢٦ ٨٤ ٣٦ ٩ ١

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

جواب ١ و ٩ و ٣٦ و ٨٤ و ١٢٦ و ١٢٦ و ٨٤ و ٣٦ و ٩ و ١

امثلہ مشق ١٤

ضابطہ جملہ ثنائی کے موافق ان جملون کی تشریح کرو

(١) $(\text{ا} + \text{لا})^{6}$ (٢) $(\text{ا} - \text{لا})^{6}$

(٣) $(\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ی})^{4}$ (٤) $(1 - \text{لا})^{9}$

(٥) $(1 - \text{لا})^{7}$ (٦) $(\text{لا} - \text{ی})^{5}$

(٧) $(1 + \text{لا})^{11}$ کے اشال کیا ہین

اشال $(\text{لا} + \text{ی})^{\text{ن}}$ کے موافق قاعدہ کے اسطرح حاصل ہوتے ہین کہ

$\text{ن} \quad \text{ن} - 1 \quad \text{ن} - 2 \quad \text{ن} - 3$ وغیرہما

$1 \quad \frac{\text{ن}}{1} \quad \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2 \times 1} \quad \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{3 \times 2 \times 1}$ وغیرہما

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$ وغیرہما

اسواسطے

$$(\text{لا} + \text{ی})^{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{ی} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2 \times 1}\,\text{لا}^{\text{ن}-2}\,\text{ی}^{2} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{3 \times 2 \times 1}\,\text{لا}^{\text{ن}-3}\,\text{ی}^{3}$$

+ وغیرہما

اس صورت کی تشریح کو ضابطہ جملہ ثنائی کہتے ہین اور اوسکو نیوٹن صاحب نے ایجاد کیا تہا

اسلئے ضابطہ نیوٹن بھی اسکا نام مشہور ہے اور ثبوت اسکا اس کتاب کے اخیر حصہ مین لکھا ہے

صعود

جس عمل سے کہ جملے کثیر الارقام کے قواء حاصل ہوتے ہین اوسکو صعود کہتے ہین اور یہہ صعود کیا تو متواتر ضرب دینے سے پیدا ہوتا ہے یا وسیلہ ضابطہ جملہ ثنائی کے حاصل ہوتا ہے جو صورتین اوسکی پیش آتی ہین اونکی توضیح کے واسطے امثلہ ذیل لکھی جاتی ہین

(۱) $(۳ا^{۲} + ۴ب^{۳})^{۴}$ کی تشریح کرو

$$(۳ا^{۲} + ۴ب^{۳})^{۲} = ۹ا^{۴} + ۲۴ا^{۲}ب^{۳} + ۱۶ب^{۶}$$

بموجب مقدمہ صفحہ ۲۷ کے مربع اس جملہ ثلاثی کا یہہ ہے

$$۸۱ا^{۸} + ۴۳۲ا^{۶}ب^{۳} + ۸۶۴ا^{۴}ب^{۶} + ۷۶۸ا^{۲}ب^{۹} + ۲۵۶ب^{۱۲}$$

اور یہی حاصل حاصل ہوتا اگر لا کی جگہہ $۳ا^{۲}$ اور ی کی جگہہ $۴ب^{۳}$ تشریح $(لا + ی)^{۴}$ مین لکھی جو بموجب ضابطہ جملہ ثنائی کے حاصل ہو

(۲) $(۱ + لا + لا^{۲} + لا^{۳})^{۲}$ کی تشریح لکھو

بموجب مقدمہ صفحہ ۲۳ کے

جواب $۱ + ۲لا + ۳لا^{۲} + ۴لا^{۳} + ۳لا^{۴} + ۲لا^{۵} + لا^{۶}$ ہے

(۳) $(۱ + لا - لا^{۲})^{۵}$ کی تشریح کرو

$(لا - ی)^{۵}$ کی تشریح جو بموجب ضابطہ ثنائی کے حاصل ہو اوسمین لا کی جگہہ ۱ + لا اور ی کی جگہہ $لا^{۲}$ لکھو اور پھر $(۱ + لا)$ کی قواء کی تشریح کرو اور قواء متماثلہ کی امثال یکجا کرو تو یہہ جواب حاصل ہوگا

$$۱ + ۵لا + ۵لا^{۲} - ۱۰لا^{۳} - ۱۵لا^{۴} + ۱۱لا^{۵} + ۱۵لا^{۶} - ۱۰لا^{۷} - ۵لا^{۸} + ۵لا^{۹} - لا^{۱۰}$$

امثلہ مشق ۱۵

ان جملون کی تشریح کرو

(۱) $(۱ + ا لا + ب لا^{۲})^{۲}$ (۲) $(۱ - ا لا + ب لا^{۲})^{۲}$

(۳) $(ا + ب لا + ح لا^{۲})^{۲}$ (۴) $(ا + ب لا - ح لا^{۲})^{۲}$

(۵) $(ا^{۲} - اب + ب^{۲})^{۳}$ (۶) $(۱ + ۲لا + ۳لا^{۲})^{۲}$

(۷) $(۲ - ۳ی + ۴ی)^{۲}$ (۸) $(ا - ب ی + ۲ی)^{۳}$

(۹) $(۱ + لا + لا^{۲})^{۴}$ (۱۰) $(م - ۲ن + ع)^{۳}$

ایک طریقہ صعود کا اوپر نیچے لکھتے ہین وہ عملاً تو بکار آمد نہین مگر طالب علم اوسپر اگر غور کرینگے تو اوسے عمل صعود کے عکس کو یعنی عمل نزول کو خوب سمجھینگے

مثالین

(۱) فرض کرو کہ (ا + ب + ح + وغیرہما) کو دوسری قوت مین اٹھانا منظور ہو تو دو خانے بناؤ اور انکے پیشانیون پر صفر لکھدو جیسے کہ نیچے صورت ہی

$$
\begin{array}{l|l}
ا & ا^۲ \\
ا & \\
\hline
۲ا & ۲اب + ب^۲ \\
ب & \overline{ا^۲ + ۲اب + ب^۲} \\
\hline
۲ا + ب & \\
ب & \\
\hline
۲ا + ۲ب & ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ + ۲اب + ۲اح + ۲بح \\
ح & \\
\hline
۲ا + ۲ب + ح & \\
ح & \\
\hline
۲ا + ۲ب + ۲ح &
\end{array}
$$

اور نتیجہ جو حاصل ہوا ہے وہ ا + ب + ح کا مربع ہی اور اب یہ ظاہر ہی کہ اگر آگے ایک اور دفعہ عمل کرین تو (ا + ب + ح + د) کا مربع حاصل ہوگا اور علی ہذا القیاس

یہان اول خانہ مین رقم زائد دو دفعہ زیادہ ہوتی ہی اور دوسری خانہ مین وہ حاصلضرب ایک ہی دفعہ زیادہ کیا جاتا ہے جو اول خانہ کے مجموعہ مستحصلہ اور رقم زاید سے حاصل ہوتا ہے،

(۲) (ا + ب + ح + وغیرہما) کو تیسری قوت مین اٹھاؤ اب تین خانہ بناؤ اور انکی پیشانیون پر صفر لکھو

ا^{۳}
ا^{۳} ۲

ا^{۲}
ا^{۲}
ا^{۲} ۲
ا^{۲} ۳

ا
ا
ا
ا ۲
ا
ا ۳

۳ا^{۲}ب + ۳اب^{۲} + ب^{۳}
ا^{۳} + ۳ا^{۲}ب + ۳اب^{۲} + ب^{۳}

۳اب + ب^{۲}
۳ا^{۲} + ۳اب + ب^{۲}
۳اب + ۲ب^{۲}
۳ا^{۲} + ۶اب + ۳ب^{۲}

ب
۳ا + ب
ب
۳ا + ۲ب
ب
۳ا + ۳ب

دوسری دفعہ جو عمل کیا گیا ہی اوسکا حاصل تشریح (ا + ب)^{۳} کی ہی اور اسیطرح عمل کرنے سے
(ا + ب + ح + وغیرہا) کی کتنی ایک رقمون کی تیسری قوت کی تشریح دریافت کرسکتے ہیں
دلیل آیندہ سے یہہ بات ظاہر ہی کہ دوسری دفعہ کی عمل مین جو ماحصل اول اور دوم اور
سوم خانہ مین لکھی گئی ہین وہ ۳(ا + ب) و ۳(ا + ب)^{۲} اور (ا + ب)^{۳} ہین اور مطابقت
اول مرتبہ کی عمل سے رکہتے ہین جسمین خانون کے اندر ۳ا و ۳ا^{۲} اور ا^{۳} لکھی گئی ہین اور ان
رقم زاید ب کو زیادہ کر کی آگے ماحصل نکالی ہین اسیطرح ایک اور رقم زاید ح زیادہ کرکے
تیسری دفعہ عمل کرنے سی یہہ ماحصل حاصل ہونگی

۳(ا + ب + ح) و ۳(ا + ب + ح)^{۲} اور (ا + ب + ح)^{۳}

اس بات پر خیال کرنا چاہئی کہ اس عمل مین اول خانہ مین تین ازدیاد اور دوسرے خانہ مین
دو ازدیاد اور تیسرے خانہ مین ایک ازدیاد ہوتا ہی اور جو زیادتی ہوتی ہے وہ رقم زائد کو ماقبل
کے خانہ کے مجموعہ مین ضرب دینے سے ہوتی ہی

الحاصل تعداد خانون کی عمل صعود مین برابر کثیر الارقام کے قوت نما کی ہوتی ہی

(۳) (ا + لا − لا^{۲})^{۳} کی تشریح اس طریقہ کے موافق کرو

ا + ب + ح

ا^2 + ۲اب + ۲اح + ۲بح + ب^2 + ح^2 | ا

ا^2 | ا

۲اب + ۲اح + ۲بح + ب^2 + ح^2 | ۲ا + ب

۲اب + ب^2 | ب

۲اح + ۲بح + ح^2 | ۲ا + ۲ب + ح

۲اح + ۲بح + ح^2 | ح

جواب ا + ب + ح

ظاہر اول رقم جذر کی ا معلوم ہوتی ہی اس رقم کو دو دفعہ اول خانہ پر زیادہ کیا اور ا^2 کو اول خانہ میں سے تفریق کیا دوسری رقم جذر کی ۲اب کو جو پہلا باقی اول رقم ہی اول خانہ کے حاصل جمع ۲ا پر تقسیم کرنے سے ب حاصل ہوتی ہی پہر عمل موافق سابق کی رقم زاید ب کے ساتھہ کیا اور جذر کی تیسری رقم اسطرح حاصل ہوتی ہی کہ باقی دوم کی اول رقم ۲اح کو ۲ا پر جو خانہ اول کے دوسرے کل مجموعہ کے اول رقم ہی تقسیم کرو

اب آگے عمل ختم ہوتا ہی کیونکہ باقی سوم صفر ہی

(۲) جذر المربع ۱ + ۴لا + ۱۰لا^2 + ۱۲لا^3 + ۹لا^4 کا نکالو

۱ + ۲لا + ۳لا^2

۱ + ۴لا + ۱۰لا^2 + ۱۲لا^3 + ۹لا^4 | ۱

۱ | ۱

۴لا + ۱۰لا^2 + ۱۲لا^3 + ۹لا^4 | ۲ + ۲لا

۴لا + ۴لا^2 | ۲لا

۶لا^2 + ۱۲لا^3 + ۹لا^4 | ۲ + ۴لا + ۳لا^2

۶لا^2 + ۱۲لا^3 + ۹لا^4 | ۳لا^2

۲ + ۴لا + ۶لا^2

جواب ۱ + ۲لا + ۳لا^2

(۳) جذر المربع لا^4 − ۶لا^{3}ی + ۱۳لا^{2}ی^2 − ۱۲لای^3 + ۴ی^4 کا دریافت کرو

لا^{۲} − ۳ لا ی + ۲ ی^{۲}

لا^{۴} − ۶ لا^{۳} ی + ۱۳ لا^{۲} ی^{۲} − ۱۲ لا ی^{۳} + ۴ ی^{۴}

لا^{۴}

− ۶ لا^{۳} ی + ۱۳ لا^{۲} ی^{۲} − ۱۲ لا ی^{۳} + ۴ ی^{۴}

− ۶ لا^{۳} ی + ۹ لا^{۲} ی^{۲}

۴ لا^{۲} ی^{۲} − ۱۲ لا ی^{۳} + ۴ ی^{۴}

۴ لا^{۲} ی^{۲} − ۱۲ لا ی^{۳} + ۴ ی^{۴}

[side column of the working:]

لا^{۲}

لا^{۲}

لا^{۲}

۲ لا^{۲}

− ۳ لا ی

۲ لا^{۲} − ۳ لا ی

− ۳ لا ی

۲ لا^{۲} − ۶ لا ی

۲ ی^{۲}

۲ لا^{۲} − ۶ لا ی + ۲ ی^{۲}

جواب لا^{۲} − ۳ لا ی + ۲ ی^{۲}

(۴) وہ شرائط دریافت کرو جنکی موافق م^{۲} لا^{۲} + ن لا + ع^{۲} ایک مجذور کامل ہو

م لا + ن/۲م

م^{۲} لا^{۲} + ن لا + ع^{۲}

م^{۲} لا^{۲}

ن لا + ع^{۲}

ن لا + ن^{۲}/۴م^{۲}

[side column of the working:]

م لا

م لا

م لا

۲ م لا

ن/۲م

۲ م لا + ن/۲م

اب ظاہر ہی کہ اگر مربع کامل ہو تو

ع^{۲} = ن^{۲}/۴م^{۲} اسواسطے جواب ن = ۲ ع م

(۵) جذر المربع ۴ لا^{۲} + ۹ ی^{۲} + می^{۲} − ۶ ی می − ۴ می + ۱۲ ی + ۴ لا می + ۴ − ۸ لا − ۱۲ لا ی دریافت کرو

لا کے قوای کے موافق اول جملہ کو بالترتیب لکھو

(۱۳) $\text{لا}^{2} - 2 + \frac{2}{\text{لا}} - \frac{1}{\text{لا}^{2}} + \frac{1}{4\,\text{لا}^{4}}$

(۱۴) $\text{آ}^{4} - 2\,\text{آ}^{3}\text{ب} + 3\,\text{آ}^{2}\text{ب}^{2} - 2\,\text{آ}\,\text{ب}^{3} + \text{ب}^{4}$

(۱۵) $4\,\text{لا}^{2} + 16\,\text{لا} + \frac{24}{3} - \frac{8}{3\,\text{لا}} + \frac{1}{9\,\text{لا}^{2}}$

جذر المکعب اور کوئی اعلےٰ درجہ کا جذر اسے عمل کے طریقہ سے نکل سکتا ہی
تعداد خانون کی اوتنی ہی ہو جتنی جذر مطلوب کے قوت نما کی تعداد ہے

مثالیں

(۱) $1 - 6\,\text{لا} + 21\,\text{لا}^{2} - 44\,\text{لا}^{3} + 63\,\text{لا}^{4} - 54\,\text{لا}^{5} + 27\,\text{لا}^{6}$

کا جذر المکعب نکالو

تین خانے بناو دو خانون مین صفر لکھو اور ایک خانہ مین جملہ مفروضہ لکھو

$1 - 2\,\text{لا} + 3\,\text{لا}^{2}$

$1 - 6\,\text{لا} + 21\,\text{لا}^{2} - 44\,\text{لا}^{3} + 63\,\text{لا}^{4} - 54\,\text{لا}^{5} + 27\,\text{لا}^{6}$

1

$-6\,\text{لا} + 21\,\text{لا}^{2} - 44\,\text{لا}^{3} +$ وغیرہ

$-6\,\text{لا} + 12\,\text{لا}^{2} - 8\,\text{لا}^{3}$

$9\,\text{لا}^{2} - 36\,\text{لا}^{3} + 63\,\text{لا}^{4} - 54\,\text{لا}^{5} + 27\,\text{لا}^{6}$

$9\,\text{لا}^{2} - 36\,\text{لا}^{3} + 63\,\text{لا}^{4} - 54\,\text{لا}^{5} + 27\,\text{لا}^{6}$

×

$1 \quad 1 \quad 1$

$2 \quad 1$

$3 \quad 1$

$3 - 6\,\text{لا} + 4\,\text{لا}^{2}$

$3 - 6\,\text{لا} + 4\,\text{لا}^{2}$

$- 6\,\text{لا} + 8\,\text{لا}^{2}$

$-3\,\text{لا}$

$3 - 12\,\text{لا} + 12\,\text{لا}^{2}$

$9\,\text{لا}^{2}$

$-18\,\text{لا}^{3} + 9\,\text{لا}^{4}$

$3 - 12\,\text{لا} + 21\,\text{لا}^{2} - 18\,\text{لا}^{3} + 9\,\text{لا}^{4}$

$3 - 3\,\text{لا}$

$-3\,\text{لا}$

$3 - 6\,\text{لا}$

$3\,\text{لا}^{2}$

$3 - 6\,\text{لا} + 3\,\text{لا}^{2}$

جواب $1 - 2\,\text{لا} + 3\,\text{لا}^{2}$

اب یہان اول خانہ مین تین ازدیاد اور دوسرے خانہ مین دو ازدیاد اور تیسرے خانہ مین ایک تفریق
اور ارقام جذر کی اس طرح حاصل ہوتی ہین تیسرے خانہ مین جو باقیات ہین اونکی اول
رقمون کو اول خانہ کے مجموعہ محصلہ کی اول رقم پر تقسیم کیا ہی

(۲) ع اور ن کی قیمت ایسی دریافت کرو کہ جملہ $3\,\text{لا}^{3} + \text{ن}\,\text{لا}^{2} + \text{ع}\,\text{لا} + \text{ق}$ ایک مکعب کامل ہو

امثلہ مشق ۱۸

ان جملوں سے جذر المکعب نکالو

تنبیہہ اون جملوں کو کسی حرف کی قواء متصاعدہ یا متنازلہ کے موافق لکھو

(۱) $8 - 36\,\text{لا} + 54\,\text{لا}^2 - 27\,\text{لا}^3$

(۲) $8\,\text{ی}^3 + 48\,\text{ی}^2 + 96\,\text{ی} + 64$

(۳) $27\,\text{لا}^3 + \frac{8}{\text{لا}^3} + \frac{36}{\text{لا}} + 54$

(۴) $8\,\text{لا}^3 + 60\,\text{لا}^2\text{ی} + 150\,\text{لا}\,\text{ی}^2 + 125\,\text{ی}^3$

(۵) $\text{ا}^6 - 6\,\text{ا}^4\text{ب} + 12\,\text{ا}^2\text{ب}^2 - 8\,\text{ب}^3$

(۶) $27\,\text{لا}^6 - 135\,\text{لا}^4\text{ی}^2 + 225\,\text{لا}^2\text{ی}^4 - 125\,\text{ی}^6$

(۷) $\text{لا}^6 - 3\,\text{لا}^5 - 3\,\text{لا}^4 + 11\,\text{لا}^3 + 6\,\text{لا}^2 - 12\,\text{لا} - 8$

(۸) $8\,\text{لا}^6 - 12\,\text{لا}^5 + 18\,\text{لا}^4 - 13\,\text{لا}^3 + 9\,\text{لا}^2 - 3\,\text{لا} + 1$

(۹) $1 + 6\,\text{لا} + 21\,\text{لا}^2 + 56\,\text{لا}^3 + 111\,\text{لا}^4 + 174\,\text{لا}^5 + 219\,\text{لا}^6 + 204\,\text{لا}^7 + 144\,\text{لا}^8 + 64\,\text{لا}^9$

(۱۰) وہ شرائط دریافت کرو کہ یہہ جملہ

$\text{لا}^3 + \text{ب}\,\text{لا}^2\text{ی} + \text{س}\,\text{لا}\,\text{ی}^2 + \text{د}\,\text{ی}^3 + \text{ی}\,\text{لا}^2 + \text{ف}\,\text{لا}\,\text{ی} + \text{ح}\,\text{ی}^2 + \text{ص}\,\text{لا} + \text{ے}\,\text{ی} + \text{ک}$

ایک مکعب کامل ہو

وفق مشترک اعظم یا مقسوم علیہ اعظم

دو عددوں کے وفق مشترک اعظم یعنی مقسوم علیہ اعظم دریافت کرنیکے واسطے ان مقدمات کا ثابت کرنا ضرور ہے

مقدمہ اول

اگر ایک عدد دوسرے عدد کو پورا تقسیم کرتا ہو تو اوسکے اضعاف کو بہی پورا تقسیم کریگا

فرض کرو کہ ع پورا ا کو تقسیم کرتا ہی یعنی یہہ فرض کرو کہ م دفعہ ع ا میں سے جاتا ہے اور کچھہ باقی نہیں رہتا تو ع پورا ک ا کو تقسیم کریگا اسواسطے کہ $\text{ا} = \text{م}\,\text{ع}$ اسسے یہہ اخراج ہوتا ہے کہ $\text{ک}\,\text{ا} = \text{ک}\,\text{م}\,\text{ع}$ اسواسطے ک ا پورا ع پر ک م دفعہ تقسیم ہوتا ہے اور کچھہ باقی نہیں رہتا

مقدمہ دوم

اگر دو عدد دونوں میں سے ہر یک کو ایک عدد پورا تقسیم کرے تو اونکی مجموعہ اور فرق کو بھی تقسیم کریگا
فرض کرو کہ ع پورا لا کو م دفعہ تقسیم کرتا ہی اسواسطے لا = م ع اور ع پورا ی کو ن دفعہ تقسیم کرتا ہی اسواسطے ی = ن ع
اور اسیواسطے

لا + ی = (م + ن) ع
لا − ی = (م − ن) ع

ان مساواتوں سی معلوم ہوتا ہی کہ ع پورا (م + ن) دفعہ مجموعہ اور (م − ن) دفعہ فرق کو تقسیم کرتا ہے

مقدمہ سوم

دو اعداد کے وفق اعظم مشترک میں اجزاء ضربی تمام مقسوم علیہ اولے جو مشترک اون دونوں اعداد میں ہوں شامل ہوتے ہیں سوا اسکے کوئی اور جز ضربی نہیں ہوتا
اول اس مقدمہ کو ایک صورت خاص لکھکر ثابت کرتی ہیں پھر اوسکے صورت عام آسانی سے ثابت ہو جائیگی
تمثیلاً فرض کرو کہ دو اعداد ۸۷۳۱۸ اور ۷۵۶۰ ہیں اور اونکی تحلیل اجزاء ضربی اولی میں کی گئی ہے تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$۱۱ \times ۷^{۲} \times ۳^{۴} \times ۲ = ۸۷۳۱۸$$
$$۵ \times ۷ \times ۳^{۳} \times ۲^{۳} = ۷۵۶۰$$

اسّے یہہ ظاہر ہے کہ وفق اعظم ان اعداد کا

$$۷ \times ۳^{۳} \times ۲ =$$

اسّے مقدمہ کا دعوی ثابت ہی اگر فقط دیکھتے سی اجزاء ضربی اولے معلوم ہو جایا کرتے تو اس مقدمہ کے موافق نہایت آسانی سی وفق اعظم مشترک معلوم ہو جایا کرتے لیکن علی العموم یہہ نہیں ہو سکتا کہ بادی النظر میں اجزاء ضربی اولے اعداد کے معلوم ہو جایا کریں اسلیئے قاعدہ کی ضرورت ہی سو اوسکو ثابت کرتی ہیں

مقدمہ چہارم

اگر ایک عدد دوسرے عدد کو تقسیم کری اور باقی کچھہ بچی تو اس باقی اور مقسوم علیہ کا وفق اعظم مشترک اون عددون کا بہی وفق اعظم مشترک ہوگا

فرض کرو ا مقسوم اور ب مقسوم علیہ ور ع خارج قسمت اور ح باقی ہو اور د وفق مشترک اعظم ب اور ح کا

$$ا = ع ب + ح$$

چونکہ د پورا ب کو تقسیم کرتا ہے تو بموجب مقدمہ اول کے ع ب کو بہی پورا تقسیم کریگا اور وہ ح کو بہی پورا تقسیم کرتا ہی تو بموجب مقدمہ دوم اونکے مجموعہ کو جو برابر ا کے ہی پورا تقسیم کریگا اسواسطے د وفق مشترک ا اور ب کا ہے اور وہ وفق مشترک اعظم اونکا بہی ہی اسواسطے اگر وہ نہو تو بشرط امکان فرض کرو کہ ذ ہے تو اس سبب سے ذ پورا ب کو تقسیم کرتا ہی تو وہ ع ب کو بہی پورا تقسیم کرتا ہی اور بموجب فرض کی وہ ا کو بہی تقسیم کرتا ہی تو بموجب مقدمہ دوم کی وہ ح کو بہی جو ا اور ع ب کا فرق ہی تقسیم کریگا اور چونکہ وہ ب اور ح کو تقسیم کرتا ہی تو وہ وفق مشترک ب اور ح کا ہے اسے یہہ ثابت ہوتا ہی کہ ب اور ح کا وفق مشترک بڑا وفق مشترک اعظم سے بہی ایک اور ہی اور یہہ باطل ہے اسواسطے اگر ایک عدد الخ

دو عددون کے وفق اعظم دریافت کرنیکے واسطی یہہ قاعدہ ہے

قاعدہ ا

(۱) بڑے کو چہوٹے پر تقسیم کرو

(۲) جو باقی بچے اوسپر چہوٹے عدد کو تقسیم کرو

(۳) اور پہر باقی اول باقی دوم پر اگر ہو تو تقسیم کرو اور اسے عمل کو جاری جب تک رکہو کہ اخر مقسوم علیہ کو اخر باقی پر تقسیم کرو

پس اخر باقی جو اس عمل میں آئیے ماقبل کے مقسوم علیہ کو پورا تقسیم کری وہی وفق مشترک اعظم ہوگا

فرض کرو کہ ا اور ب دو اعداد ہون

ب) ا (ع
ع ب
ح) ب (ق
ح ق
د) ح (ر
د ر
س) د (ص
س ص

اگر عمل کا خاتمہ اسیطرح ہو جسطرح اوپر لکھا تو باقی چہارم مین آخر مقسوم علیہ وفق مشترک اعظم ہوگا
اسے یہہ استخراج ہوتا ہے کہ س و ق مشترک (د، ب، س، ص) اعظم د اور س کا ہی اور اسیواسطے بموجب
مقدمہ چہارم وہ د اور ح کا وفق اعظم ہے اور نیز ح اور ب کا اور جب وہ ح
اور ب کا وفق اعظم ہوا تو وہ ا اور ب کا وفق اعظم ہوا

ارقام مفردہ کا وفق اعظم بموجب مقدمہ سوم اشلہ ذیل کی طرح نکلتا ہے

مثالین

(۱) ۹ لا^{۲} ی^{۳} اور ۱۲ لا^{۳} ی^{۲} ی کا وفق اعظم دریافت کرو

بموجب مقدمہ سوم کے تمام اجزاء ضربی کو جو مشترک دونوں رقموں مین نہ ہون دور کرو اور پھر باقی
اجزاء ضربی کو رہنے دو تو یہہ جواب حاصل ہوگا کہ ۳ لا^{۲} ی^{۲}

(۲) ا^{۲} ب ج لا^{۶} ی^{۳} اور ا ب ج^{۲} لا^{۲} ی کا وفق اعظم دریافت کرو

جواب وفق اعظم = ا ب ج لا^{۲} ی

اشلہ مشق ۱۹

ان ارقام مفردہ کا وفق اعظم دریافت کرو

(۱) ۳ لا^{۲} ی اور ۱۵ لا^{۳} ی^{۲} کا (۲) ۱۰ ا ب^{۲} ج اور ۲۵ ا^{۲} ب کا
(۳) ۷۵ م^{۲} ن^{۳} ع اور ۴۵ د^{۳} م^{۲} ن کا (۴) ۱۴ لا^{۳} ی^{۴} اور ۴۲ لا^{۲} ی^{۳} کا
(۵) ۱۶ ا ب^{۲} اور ۸۴ ا^{۲} ب کا (۶) ۱۵۵ لو^{۶} مو^{۶} می^{۴} اور ۹۳ لو^{۵} مو^{۶} می^{۴} کا

دو یا زیادہ کثیر الارقام کا وفق اعظم اسیطرح دریافت ہوسکتا ہی جس طرح دو یا زیادہ عددون کا
وفق اعظم دریافت کیا تھا مگر اوسمین یہہ ترمیم ضرور ہے جو اشلہ ذیل مین کی گئی ہے
دو کثیر الارقام کا وفق اعظم وہ کثیر الارقام ہے جسکا رتبہ اعلیٰ ہو اور وہ دونو کو بغیر باقی کے
تقسیم کرتا ہو اور دونو خارج قسمتون کے مشترک اجزاء ضربی اوسمین شامل ہون

مثالین

(۱) ان جملون لا^{3} + ۴لا^{2} + ۳لا + ۱ اور لا^{2} + ۳لا + ۱ کا وفق اعظم دریافت کرو

لا^{2} + ۳لا + ۱) لا^{3} + ۴لا^{2} + ۳لا + ۱ (لا

لا^{3} + ۳لا^{2} + لا

لا + ۱) لا^{2} + ۲لا + ۱ (لا + ۱

لا^{2} + لا

لا + ۱

لا + ۱

اس مثال مین کثیر الارقام تیسرے رتبہ کا دوسرے رتبہ کے کثیر الارقام پر تقسیم ہوا ہے اور چونکہ باقی لا + ۱ مقسوم علیہ سابق کو پوری تقسیم بغیر باقی کے کرتی ہی اسواسطے لا + ۱ جواب مطلوب ہے

(۲) ان جملون ۲لا^{3} − ۷لا − ۳ اور ۲لا^{2} − لا − ۶ کا وفق اعظم دریافت کرو

۳لا^{2} − لا − ۶) ۳لا^{3} − ۷لا − ۳ (لا + $\frac{1}{2}$

۳لا^{3} − لا^{2} − ۶لا

لا^{2} − لا − ۳

لا^{2} − $\frac{1}{2}$لا − ۳

− $\frac{1}{2}$لا + ۱) ۲لا^{2} − لا − ۶ (−۴لا − ۶

۲لا^{2} − ۴لا

۳لا − ۶

۳لا − ۶

قاعدہ کے موافق عمل کرنے سے وفق اعظم − $\frac{1}{2}$لا + ۱ معلوم ہوتا ہی اور جملے مفروضہ اسپر تقسیم کئے جائینگے تو حاصل −۴لا^{2} − ۸لا − ۳ اور −۴لا − ۶ ہونگے لیکن ان خارج قسمتون مین ایک جزو ضربی مشترک یعنی −۲ ہی اسواسطے دراصل وفق اعظم حاصلضرب − $\frac{1}{2}$لا + ۱ اور −۲ کا یعنی لا − ۲ ہے اسواسطے جواب لا − ۲ ہے

سیدہی طرح سے یہہ نتیجہ قاعدہ کو اسطرح کام مین لانے سے حاصل ہوسکتا ہی کہ

۲ لا۲ − لا − ۶) ۳ لا۳ − ۷ لا۲ − ۲ (لا + ۱
۳ لا۳ − لا۲ − ۶ لا
لا۲ − لا − ۲ × ۲
۲ لا۲ − ۲ لا − ۳
۲ لا۲ − لا − ۶
− لا + ۲ × (−۱)
لا − ۲) ۲ لا۲ − لا − ۶ (۲ لا + ۳
۲ لا۲ − ۴ لا
۳ لا − ۶
۳ لا − ۶

اب اسے سیدہی طرح یہہ معلوم ہوگیا کہ وفق اعظم لا − ۲ ہے دلیل قاعدہ کی اس ترمیم کی یہہ ہے اول باقی لا۲ − لا − ۲ ہی چونکہ اول رقم کا سر ایک ہی اسلئے آگے تقسیم بغیر کسر کے داخل کرنے کے نہیں ہوسکتی اسواسطے دو مین ضرب دیتی ہین اور ۲ لا۲ − ۲ لا − ۳ کو مقسوم جدید بناتی ہین جسکو مقسوم علیہ پر تقسیم کرنے سے کسر نہین داخل ہوتی اب سوال یہہ ہی کہ ہم اس ۲ کی داخل کرنے کی کس دلیل سے مجاز ہین دلیل اس مجاز ہونے کی یہہ ہی کہ بموجب مقدمہ چہارم کے وفق اعظم مطلوب وفق اعظم باقی اور مقسوم علیہ کا ہی اسواسطے بموجب مقدمہ سوم کے وہ وفق اعظم ۲ × باقی اور مقسوم علیہ کا ہی کیونکہ جز ضربی ۲ جز ضربی مقسوم علیہ ۲ لا۲ − لا − ۶ کا نہین ہی اور اسیواسطے وہ دونو جملون مین مشترک نہین ہی اور اسیواسطے وفق اعظم مین نہ وہ داخل ہوسکتا ہے اور نہ اوسکو بدل سکتا ہی خارج قسمت مین لا کی نجی دلکہہ دیتی ہین جسکی یہہ مفہوم ہو کہ وہ اپنی رقم ما بعد سے وہ تعلق نہین رکہتا جو معمولی تقسیم مین پیدا رکہا کرتا ہی

دوسرے باقی − لا + ۲ کو پہلے مقسوم علیہ بنانی سے جز ضربی −۱ مین ضرب دیتے ہین تاکہ اول رقم کی علامت بدل جاے اور اس تبدیل کے مجاز ہم اوسی دلیل کے موافق ہین جسکی موافق جز ضربی ۲ اوپر داخل کیا تہا یعنی اس دلیل سی کہ وہ جز ضربی ۲ لا۲ − لا − ۶ کا جو اب مقسوم بنا ہی نہین ہے اور اسیواسطے وہ وفق اعظم مطلوب مین کسی طرح کا تبدل نہین پیدا کرسکتا ہی

(۳) جملون ۱۵ لا۳ − ۶ لا۲ − ۳۵ لا + ۱۴ اور ۱۰ لا۲ + ۱۱ لا + ۶ کا وفق اعظم دریافت کرو

چونکہ ۲ جزو ضربی دوسرے جملہ کا نہیں ہے اسلئے ہمکو اختیار ہی کہ اول جملہ کو ۳ مین ضرب دین اور اس سے مقسوم ایسا حاصل ہو جائیگا جسمے کہ کسر داخل نہین ہوگا

۱۰لا^۲ + ۱۱لا − ۶) ۳۰لا^۴ − ۲لا^۳ − ۷۰لا^۲ + ۲۸لا + ۴۵ (۳لا^۲ ...
۳۰لا^۴ + ۳۳لا^۳ − ۱۸لا^۲

− ۳۵لا^۳ − ۵۲لا^۲ + ۲۸لا × (− ۱۰)

۳۵۰لا^۳ + ۵۲۰لا^۲ − ۲۸۰لا
۳۵۰لا^۳ + ۳۸۵لا^۲ − ۲۱۰لا

۱۳۵لا^۲ − ۷۰لا ÷ ۵
۲۷لا − ۱۴

۲۷لا − ۱۴) ۱۰لا^۲ + ۱۱لا − ۶ (...
۱۰لا^۲ − ۴لا

۱۵لا − ۶
۱۵لا − ۶

چونکہ − ۱۰ جزو ضربی مقسوم علیہ کا نہین ہے اسلئے اول باقی کو اسمین داخل کیا اوسی وفق اعظم مین کچھہ خلل نہین واقع ہوگا دوسری باقی مین جزو ضربی ۵ واقع ہوتا ہی اور چونکہ وہ مقسوم علیہ کا جزو ضربی نہین ہی اسلئے اوسکو القط کردیا کہ وہ اونکی وفق اعظم مین نہین داخل ہوتا اور اسلئے وہ ساقط ہو سکتا ہی اور خارج قسمت ۵لا − ۲ پہلے مقسوم علیہ کو بغیر باقی کی تقسیم کرتا ہی اسلئے وفق اعظم مطلوب = ۵لا − ۲

(۴) جملون ۴لا^۴ − ۵لا^۳ + ۴لا^۲ − ۳لا + ۵ اور ۴لا^۳ − ۱۰لا^۲ + ۶لا − ۱۵ کا وفق اعظم دریافت کرو

۴لا^۳ − ۱۰لا^۲ + ۶لا − ۱۵) ۲۸لا^۴ − ۷۰لا^۳ + ۸لا^۲ − ۴۲لا + ۱۰ (۷لا
۲۸لا^۴ − ۷۰لا^۳ + ۴۲لا^۲ − ۱۰۵لا

− ۳۴لا^۲ + ۸۱لا + ۱۰

۳۴لا^۲ − ۸۱لا − ۱۰) ۶۸لا^۳ − ۱۷۰لا^۲ + ۱۰۲لا − ۲۵۵ (۲لا + ۴
۶۸لا^۳ − ۱۶۲لا^۲ − ۲۰لا

− ۸لا^۲ + ۱۲۲لا − ۲۵۵ × (− ۱۷)

۱۳۶لا^۲ − ۲۰۷۴لا + ۴۳۳۵
۱۳۶لا^۲ − ۳۲۴لا − ۴۰

− ۱۷۵۰لا + ۴۳۷۵ ÷ (− ۸۷۵)

۲ لا − ۵) ۴ ۳ لا^{۲} − ۱۸ لا − ۱۰ (۱۷ لا + ۲

۴ ۳ لا^{۲} − ۸۵ لا

۴ لا − ۱۰

۴ لا − ۱۰

جواب وفق اعظم = ۲ لا − ۵

اس مثال مین علی کثیر الارقام کو ۲ مین ضرب دیتے ہین کیونکہ ۲ دوسرے جملے کا جزو ضربی نہین ہے اسلئے وہ وفق اعظم مین کچھہ خلل نہین ڈالیگا اب دوسرے مرحلہ مین عمل کی اسی دلیل کی موافق باقی اول کو ۔ ا مین ضرب دیکر نیا مقسوم علیہ بناتی ہین اور اول مقسوم علیہ کو ۷ مین ضرب دیکر نیا مقسوم بناتی ہین اب عمل کے دوسرے مرحلہ مین باقی کو ۔ ۷ مین دلیل سابق کے موافق ضرب دیتے ہین اب اس مرحلہ عمل مین ۔ ۱۷۵۰ لا + ۴۳۷۵ باقی دوم یعنی ۔ ۸۷۵ (۲ لا − ۵) ہی ۔ ۸۷۵ جزو ضربی مقسوم علیہ کا نہین ہی اسلئے وہ مقسوم علیہ اعظم مین نہین داخل ہو سکتا اسواسطے اوسکو ساقط کرو پس جملہ ۲ لا − ۵ جو باقی رہتا وہ کثیر الارقام مفروضہ کا وفق اعظم ہے

(۵) ان جملوں ۴۲ لا^{۵} + ۳۳ لا^{۴} − ۱۲ لا^{۳} − ۱۶ لا^{۲} اور ۴۵ لا^{۴} + ۱۹۸ لا^{۲} + ۱۶۸ لا کا وفق اعظم دریافت کرو

اب معاینہ سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ ۲ لا^{۲} ایک جزو ضربی اول کثیر الارقام کا اور ۶ لا ایک جزو ضربی دوسرے کثیر الارقام کا ہی اور سوا اسکی ۳ لا جزو ضربی مشترک ان دونون جملون کا ہے اسلئے ہم جزو ضربی مشترک ۳ لا کو قائم کرتے ہین اور باقی اجزا کو یعنی ۲ لا اور ۳ کو دور کرتی ہین ۲ لا^{۲} اور ۶ لا کو کثیر الارقام پر تقسیم کرنے سے کثیر الارقام کی تحویل ان جملون کی طرف ہو جائیگی کہ ۶ لا^{۳} + ۸ لا^{۲} − ۳ لا − ۴ اور ۹ لا^{۳} + ۳۳ لا + ۲۸ اور پھر اس طرح عمل کرو

۹ لا^{۲} + ۳۳ لا + ۲۸) ۱۸ لا^{۳} + ۲۴ لا^{۲} − ۹ لا − ۱۲ (۲ لا + ۱۴

۱۸ لا^{۳} + ۶۶ لا^{۲} + ۵۶ لا

− ۴۲ لا^{۲} − ۶۵ لا − ۱۲ × (−۳)

۱۲۶ لا^{۲} + ۱۹۵ لا + ۳۶

۱۲۶ لا^{۲} + ۴۶۲ لا + ۳۹۲

(−۸۹) ÷ ۲۶۷ لا − ۳۵۶ −

(۳لا + ۴) (۳لا۲ + ۷) | ۹لا۲ + ۳۳لا + ۲۸

۹لا۲ + ۱۲لا

۲۱لا + ۲۸

۲۱لا + ۲۸

اسسے یہہ ظاہر ہوتا ہی کہ ۳لا + ۴ وفق اعظم کثیر الارقام مختصر کا ہی اب اسکو جزضربی مشترک ۲لا مین ضرب دو تو یہہ جواب حاصل ہوگا کہ ۶لا۲ + ۸لا

عمل اور مسئلہ وفق اعظم کا تمام اور کمال ان مثالون مین بیان کیا گیا اور تجربہ سے یہہ بات ثابت ہی کہ جبر کے جملون کے وفق اعظم دریافت کرنی مین بڑی دشواری اور دقت اس بات کی دریافت کرنےمین پڑتی ہی کہ کون سے اجزاء ضربی کو قائم رہنے دین اور کونسی اجزاء ضربی کو داخل کرین اور کونسی اجزاء ضربی کو ساقط کرین اسواسطے قواعد ذیل اور زیادہ کئے جاتے ہین

قاعدہ اول دونو کثیر الارقام مین جدا جدا جو اجزاء ضربی ہر رقم مین مشترک ہون اونکو تحقیق کرو اگر کوئی جز ضربی مشترک دونو کثیر الارقام مین ہو تو اوسکو مقسوم علیہ اعظم مطلوب کے اجزاء ضربی بنانے کے واسطے علیحدہ رکھہ چھوڑدو اور باقی اور اجزاء ضربی کو ساقط کرو

قاعدہ دوم ہر باقی سے تمام مقسوم علیہ مفردہ ساقط کرو اور ضرورت کی صورت مین ایسے اجزاء ضربی داخل کرو کہ اونکی موافقی خارج قسمت امین کسر نہ داخل ہو

قاعدہ سوم اگر امثال عددی ایسے بڑے ہو جائین کہ اونکی اجزاء ضربی بادی النظر مین معلوم ہون تو اونکا مقسوم علیہ اعظم قواعد اعداد کی صورت سے دریافت کرو

مثالین

ان جملون کا وفق اعظم دریافت کرو

$$۹۰لا^۲ی^۲ + ۳۰لا^۴ی^۳ + ۵۰لا^۲ی^۳ - ۲۵۰لای^۲$$

$$۳۶لای^۳ - ۱۸لا^۴ی^۳ + ۶۰لا^۳ی^۴ - ۳۰لای^۵$$

معاینہ سے یہہ ظاہر ہوتا ہی کہ ۱۰لای۲ جزضربی مشترک اول کثیر الارقام کی ہر رقم مین ہے اور ۶لای۲ جزضربی مشترک دوسرے کثیر الارقام کے ہر رقم مین ہے اور ان دونو کا

جز ضربی مشترک ۲ لا ی ہے اسلئے اسکو رکہہ چہوڑو اور باقی اجزا کو ساقط کرکے جملوں کی مختصر صورت یہہ بناؤ کہ ۹ لا^{۳} + ۳ لا^{۲} ی + ۵ لا ی^{۲} − ۲۵ ی^{۳} اور ۶ لا^{۳} − ۳ لا^{۲} ی + ۱۰ لا ی^{۲} − ۵ ی^{۳}

ان میں سے اول کو ۲ میں ضرب دیکر اسطرح عمل کرو

۶ لا^{۳} − ۳ لا^{۲} ی + ۱۰ لا ی^{۲} − ۵ ی^{۳}) ۱۸ لا^{۳} + ۶ لا^{۲} ی + ۱۰ لا ی^{۲} − ۵۰ ی^{۳} (۳ لا و + ۱

۱۸ لا^{۳} − ۹ لا^{۲} ی + ۳۰ لا ی^{۲} − ۱۵ ی^{۳}

۱۵ لا^{۲} ی − ۳۰ لا ی^{۲} + ۲۵ لا ی^{۲} − ۵۰ ی^{۳} (۵ ی

۳ لا^{۲} − ۶ لا ی + ۵ لا ی^{۲} − ۱۰ ی^{۳}

۲

۶ لا^{۳} − ۱۲ لا^{۲} ی + ۱۰ لا ی^{۲} − ۲۰ ی^{۳}

۶ لا^{۳} − ۳ لا^{۲} ی + ۱۰ لا ی^{۲} − ۵ ی^{۳}

۹ لا^{۲} ی + ۱۵ ی^{۳} (۳ ی

۳ لا^{۲} + ۵ ی^{۲}

۳ لا^{۲} + ۵ ی^{۲}) ۶ لا^{۳} − ۳ لا^{۲} ی + ۱۰ لا ی^{۲} − ۵ ی^{۳} (۲ لا − ی

۶ لا^{۳} + ۱۰ لا ی^{۲}

− ۳ لا^{۲} ی − ۵ ی^{۳}

− ۳ لا^{۲} ی − ۵ ی^{۳} جواب وفق اعظم = ۶ لا^{۳} ی + ۱۰ لا ی^{۳}

امثلہ مشق ۳۰

ان جملوں کا وفق اعظم دریافت کرو

(۱) لا^{۳} − لا^{۲} + لا − ۱ اور لا^{۲} − ۱ کا

(۲) ۲ لا^{۲} + لا ی − ۳ ی^{۲} اور ۳ لا^{۲} − ۴ لا ی + ی^{۲} کا

(۳) ۲۰ ی لا^{۴} + ۴۰۱ ی^{۲} لا^{۳} + ۲۳۲ ی^{۳} لا^{۲} اور ۲۴ لا^{۳} ی^{۲} + ۱۱۴ لا^{۲} ی^{۳} − ۳۶ لا ی^{۴} کا

(۴) ۳ ا لا^{۲} − ۳ ب لا ی − ۴ ا لا ی + ۴ ب ی^{۲} اور ۳ م لا^{۲} + ۳ ن لا ی − ۴ م لا ی − ۴ ن ی^{۲} کا

(۵) ۲ لا^{۳} + ۹ لا^{۲} + ۵ لا − ۱۵ اور ۴ لا^{۳} + ۸ لا^{۲} + ۳ لا + ۲۰ کا

(۶) ۶ لا^{۴} + ۲۷ لا^{۳} + ۹ لا^{۲} − ۲۴ لا اور ۱۸ لا^{۴} − ۳۰ لا^{۳} − ۲۸ لا^{۲} + ۹۶ لا کا

(۷) لا^{۵} + ۵ لا^{۳} + ۶ اور لا^{۲} + ۴۰ لا + ۳۹ کا

(۸) ۳ لا^{۵} − ۲۰ لا^{۲} + ۱۵ لا + ۲ اور لا^{۴} − ۴ لا + ۳ کا

(۹) ۴لا^{6} + ۸لا^{5} − ۶۵لا^{4} − ۱۲لا^{3} اور ۶لا^{3} − ۶لا^{2} − ۳۶لا کا

(۱۰) ۱۲ا^{2}لا^{2} + ۱۳۰ا^{4}لا^{2} − ۳۳ا^{5}لا اور ۳لا ا^{2} − ۳۷لا^{3}ا^{2} + ۱۳۹لا^{6}ا^{4} − ۵الا^{3}

مشترک ذواضعاف اقل

دو عددون کے مشترک ذواضعاف اقل نکالنے کا قاعدہ یہہ ہے کہ

قاعدہ

(۱) اعداد مفروضہ کا وفق اعظم دریافت کرو

(۲) اون اعداد مین سے ایک عدد کو اس وفق اعظم پر تقسیم کرو

(۳) خارج قسمت کو دوسری عدد مین ضرب دو

پس جو حاصلضرب اس طرح حاصل ہوگا وہ مشترک ذواضعاف اقل ہوگا

فرض کرو کہ ا اور ب دو اعداد ہون اور اونکا مشترک ذواضعاف م ہو اب اسکو ا اور ب پر تقسیم کرنے سے جو خارج قسمت ع اور ق پیدا ہونگی وہ حتی الامکان کم از کم ہونگے

چونکہ م = ا ع اور م = ب ق تو اسے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ ا ع = ب ق اور اسیواسطے

$$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ع}}{\text{ق}}$$

اسیواسطے $\frac{\text{ع}}{\text{ق}}$ برابر کسر مختصر المدین $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ کے ہے اور مختصر الحدین اسطرح ہوتی ہی کہ ا اور ب دونکو اونکے مشترک وفق اعظم پر تقسیم کرین

فرض کرو کہ د اونکا وفق اعظم ہے اسیواسطے

$$\text{ق} = \frac{\text{ا}}{\text{د}}$$

ہر طرف کو ب مین ضرب دو تو

$$\text{ب ق} = \frac{\text{ا ب}}{\text{د}}$$

لیکن ب ق = م مشترک ذواضعاف اقل کے اسواسطے دو اعداد کے مشترک ذواضعاف اقل دریافت کرنیکے واسطے یہہ قاعدہ ہی کہ اونکا وفق اعظم نکالو اور اوسپر ایک عدد کو تقسیم کرو

اور خارج قسمت کو دوسرے عدد مین ضرب دو

دو یا زیادہ جبریہ جملون کے مشترک ذو اضعاف اقل دریافت کرنیکا وہی قاعدہ ہی جو دو یا زیادہ اعداد کے ذو اضعاف اقل دریافت کرنیکا قاعدہ ہی اختصاراً مشترک ذو اضعاف اقل کی جگہہ ضیق لکھینگے

مثالین

(۱) ۱۲ ا^{۲} ب^{۳} ج لا د اور ۹ ا^{۳} ب لا^{۲} کا ضیق دریافت کرو

اس مثال مین اور اسی قبیل کی اور مثالون مین جہان ارقام مفردہ ہون وہان معائنہ سی ضیق دریافت کرنیکا طریقہ عمدہ ہی ضیق امثال عددی کا ۳۶ ہی اور باقی اجزا کا ا^{۳} ب^{۳} ج لا^{۲} د اسیواسطے

ضیق = ۳۶ ا^{۳} ب^{۳} ج لا^{۲} د

(۲) ۱۳۳ لا^{۲} د^{۳} ی اور ۲۴۷ لا^{۵} د^{۴} ی^{۲} کا ضیق کیا ہے

چونکہ ضیق ۱۳۳ اور ۲۴۷ کا ۱۷۲۹ ہی اسلئے

جواب ضیق = ۱۷۲۹ لا^{۵} د^{۴} ی^{۲}

(۳) ۱۲ (ا^{۲} ب − ا ب^{۲}) اور ۱۸ (ا^{۳} − ب^{۳}) کا ضیق دریافت کرو

معائنہ سی یہہ ظاہر ہی کہ یہہ جملے اجزاء ضربی ۲^{۲} × ۳ اب (ا − ب) اور ۲ × ۳^{۲} (ا − ب) (ا^{۲} + اب + ب^{۲}) مین تحلیل ہو سکتی ہین اسیواسطے ضیق مین اعلے قوت ہر جزو ضربی کی ہونی چاہیئے اسیواسطے

جواب ضیق = ۳۶ (ا^{۴} ب − ا ب^{۴})

(۴) ضیق جملون ۲ لا^{۳} − ۵ لا^{۲} + ۵ لا − ۳ اور ۸ لا^{۲} − ۱۰ لا − ۳ کا ضیق دریافت کرو

مشترک اجزاء ضربی ان جملون کا معائنہ سے نہین معلوم ہوتا اسلئے قاعدہ عامہ کو کام مین لاؤ اسیواسطے وفق مشترک ۲ لا − ۳ ہی خارج قسمت آخر جملہ کا ۴ لا + ۱ ہی جسکو اول جملے مین ضرب دین تو ذو اضعاف اقل یہہ حاصل ہوگا کہ ضیق = ۸ لا^{۴} − ۱۸ لا^{۳} + ۱۵ لا^{۲} − ۷ لا − ۳

امثلہ مشق ۲۱

ان جملون کا مشترک ذو اضعاف اقل دریافت کرو

(۱) ۱۲ ا^{2} ب ج اور ۲۸ ا ب^{2} ج^{3} کا

(۲) ۳۳ م ن لا^{2} م^{2} ی^{9} اور ۱۲۱ ع ق لا^{2} د^{2} ی کا

(۳) ۴ لا^{2} د اور ۱۲ لا^{3} د ی اور ۲۱ ی لا^{2} د کا

(۴) ۱۵ (لا^{2} − د^{2}) لا د اور ۳۵ (لا^{4} − د^{4})

(۵) ۷ (ا^{2} ب − ا ب^{3}) اور ۱۴ ا ب ج اور ۲۱ (ا^{2} − ب^{2})

(۶) ۲ لا^{2} + ۳ لا − ۲ اور لا^{2} + لا − ۲

(۷) لا^{2} − لا د − ۲ د^{2} اور لا^{2} − د^{2} کا

(۸) لا^{3} − ا^{3} اور لا^{2} − ا^{2} کا

(۹) ۷ (لا − ا) اور ۱۴ (لا^{2} − ا^{2}) اور ۲۱ (لا^{3} − ا^{3}) کا

(۱۰) لا^{5} − ۵ لا^{3} + لا^{2} + ۴ لا − ۴ اور لا^{4} + لا^{3} − ۶ لا^{2} − ۴ لا + ۸

امثال منقطع

مسٹر ہورنر صاحب نے اعمال جبریہ میں بہت باتیں ایجاد کرکے ایزاد کیں ایک ترکیب ضرب اور تقسیم کثیر الارقام کی بھی نئی نکالی اس ترکیب کا نام امثال منقطع ہے اور وجہ تسمیہ یہ ہے کہ ہم ارقام میں سے امثال کو قطع کرکے تمام عمل فقط اونہیں پر کرتے ہیں اور جو اعداد انکے ساتھ رموز یا حروف کثیر الارقام کی ترکیب میں ہوتے ہیں اونسے قطع نظر کرتے ہیں

دو کثیر الارقام کے ضرب میں اس ترکیب کا طریقہ امثلہ ذیل میں معلوم ہوگا

مثالیں

(۱) کثیر الارقام ۳ لا^{4} − ۲ لا^{3} + ۴ لا^{2} + ۶ لا − ۵ کو ۲ لا^{2} + ۳ لا − ۲ میں ضرب دو

		۵ −	۶	۴	۲ −	۳
				۲ −	۳	۲
		۱۰ −	۱۲	۸	۴ −	۶
	۱۵ −	۱۸	۱۲	۶ −	۹	
۱۰	۱۲ −	۸ −	۴	۶ −		
۱۰	۲۷ −	۰	۲۸	۴ −	۵	۶

جواب ۶ لا^۶ + ۵ لا^۵ − ۴ لا^۴ + ۲۸ لا^۳ − ۲۷ لا + ۱۰

اب اس عمل کو عمل ضرب سے جو نیچے لکہا ہے مقابلہ کرو تو دلیل عمل مذکور کی سمجہہ میں آئیگی اور یہہ معلوم ہوگا کہ اسطرح عمل کرنے سے کسقدر محنت اور دقت کی بچت ہوتی ہے

۳ لا^۴ − ۲ لا^۳ + ۴ لا^۲ + ۶ لا − ۵

۲ لا^۲ + ۳ لا − ۲

---

۶ لا^۶ − ۴ لا^۵ + ۸ لا^۴ + ۱۲ لا^۳ − ۱۰ لا^۲

۹ لا^۵ − ۶ لا^۴ + ۱۲ لا^۳ + ۱۸ لا^۲ − ۱۵ لا

− ۶ لا^۴ + ۴ لا^۳ − ۸ لا^۲ − ۱۲ لا + ۱۰

---

۶ لا^۶ + ۵ لا^۵ − ۴ لا^۴ + ۲۸ لا^۳ − ۲۷ لا + ۱۰

اس ترکیب مختصر کا اصول یہہ ہی کہ اوسمین وہ تمام اجزا ترک کر دیئے جاتے ہین جنکی کچہہ ضرورت عمل مین نہین ہی اور فقط وہی اصل اجزا یعنی امثال اور اونکی ترکیب لی جاتی ہی جنسی کہ کام پڑتا ہی

(۲) کثیر الارقام ۴ لا^۵ − ۳ لا^۳ + ۲ لا − ۱ کو ۳ لا^۳ + ۲ لا^۲ − ۵ مین ضرب دو

اس مثال مین ہر کثیر الارقام مین بعض رقمین موجود نہین ہین اسواسطے امثال کی ثبت کرنے مین اون ارقام کی جگہہ صفر لکہو اور اسطرح عمل کرو

۴ ۰ −۳ ۰ ۲ −۱

۳ ۲ ۰ −۵

---

۱۲ ۰ −۹ ۰ ۶ −۳

۸ ۰ −۶ ۰ ۴ −۲

۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰

−۲۰ ۰ ۱۵ ۰ −۱۰ ۵

---

۱۲ ۸ −۹ −۲۶ ۶ ۱۶ −۲ −۱۰ ۵

جواب ۱۲ لا^۸ + ۸ لا^۷ − ۹ لا^۶ − ۲۶ لا^۵ + ۶ لا^۴ + ۱۶ لا^۳ − ۲ لا^۲ − ۱۰ لا + ۵

حاصل ضرب کا رتبہ برابر مضروب اور مضروب فیہ کے رتبوں کے مجموعہ کے ہی مضروب اور مضروب فیہ کے امثال کے لکہنے مین اس قاعدہ کو ذہن مین رکہنا چاہئے

قاعدہ

تعداد ارقام کی کسی کامل کثیر الارقام مین اوسکے ربتی سے ایک زیادہ ہوتی ہی
اس قاعدہ پر توجہ کرنے سے ہم اس غلطی سے بچینگی جو اکثر امثال منقطع کی ترکیب مین ارقام
معدومہ کی جگہہ صفر لکھنی مین ہوا کرتی ہی.
اخر مثال مین یہہ ظاہر ہے کہ ہم صفر کی سطر کو جو مضروب فیہ کامل کی تیسری رقم ہو اوس کے موافق ہاتھ
دور کر سکتی ہین ایسی صورت مین یہہ احتیاط چاہیئے کہ آگے کی عمل پہلی رقم کو دو مرتبے چہوڑ کر
لکھین اور اگر دو صفر متواتر مضروب فیہ مین واقع ہون تو سطر مابعد کی اول رقم تین مرتبے چہوڑ کر
لکھین اور علی ہذا القیاس

امثلہ مشق ٢٢

	مضروب	مضروب فیہ
(١)	$\text{لا}^{2} + 2\text{لا} + 1$	$\text{لا} + 1$
(٢)	$\text{لا}^{3} - 3\text{لا}^{2} + 3\text{لا} - 1$	$\text{لا}^{2} - 2\text{لا} + 1$
(٣)	$5\text{لا}^{4} - 3\text{لا}^{2} + 1$	$11\text{لا}^{2} + \text{لا} - 13$
(٤)	$2\text{لا}^{5} - \text{لا}^{3} + \text{لا}$	$4\text{لا}^{2} + \text{لا} - 1$
(٥)	$3\text{لا}^{6} - 4\text{لا}^{4} + 2\text{لا} - 1$	$\text{لا}^{5} + \text{لا}^{2} - 1$
(٦)	$2\text{لا}^{3} + 3\text{لا}^{2} + 4\text{لا} + 5$	$\text{لا}^{2} - 2\text{لا} + 1$
(٧)	$20\text{لا}^{4} - 3\text{لا}^{2} + 2$	$\text{لا}^{2} - \text{لا} + 3$
(٨)	$4\text{لا}^{2} - 2\text{لا} + 8$	$3\text{لا}^{2} + 5\text{لا} - 6$
(٩)	$5\text{لا}^{3} - 2\text{لا} + 1$	$5\text{لا}^{3} + 2\text{لا} - 1$
(١٠)	$\text{لا}^{5} + \text{لا}^{3} - \text{لا} - 1$	$\text{لا}^{4} + \text{لا}^{3} + \text{لا} + 1$

امثال منقطع کی ترکیب تقسیم مین جب تک سیدہی طرح نہین چل سکتی کہ رقم اولین کا سر
مقسوم علیہ مین ایک نہ ہو عمل کرنیکا طریقہ امثلہ ذیل سے ظاہر ہے

مثالین

(١) $2\text{لا}^{5} + 7\text{لا}^{4} + 30\text{لا}^{3} + 30\text{لا}^{2} + 34\text{لا} + 35$ کو $\text{لا}^{2} + 2\text{لا} + 5$ پر تقسیم کرو

٣٥	٣٤	٣٠	٢٠	٧	٢	١
	١٤-	٨-	٦-	٤-		٢-
٣٥-	٢٠-	١٥-	١٠-			٥-

جواب ٢لا٣ + ٣لا٢ + ٤لا + ٧

٧ ٤ ٣ ٢

طریقہ عمل کرنیکا اسطرح ہی کہ مقسوم کے امثال کو سطر افقی مین لکہا اور جو اونکی علامتین تہین وہ اونکے ساتہہ رکہین اور مقسوم علیہ کے امثال کو سطر عمودی مین لکہا اور سوا اول رقم کے سب امثال کی علامتین بدل دی جو اول سطر مین ہندسہ پہلے ہو اوسکو سب سے نیچے کی سطر مین اول لکہو اور خارج قسمت کا اول ہندسہ سمجہو اور اوسکو -٢ اور -٥ مین ضرب دو اور حاصل ضربونکو دوسری اور تیسری سطر عمودی مین لکہو اب دوسری سطر عمودی کا مجموعہ ٣ خارج قسمت کا دوسرا ہندسہ ہوگا اب اسکو -٢ اور -٥ مین ضرب دو اور حاصل ضربون کو تیسری اور چوتہی عمودی سطر مین لکہو اب خارج قسمت کا تیسرا ہندسہ ٤ مجموعہ اون ہندسون کا ہی جو تیسری سطر عمودی مین لکہی ہین اب عمل اسیطرح باسانی جاری رہتا ہی اور سطور عمودی کے مجموعہ سے خارج قسمت کے امثال معلوم ہوتے ہین خارج قسمت مین تعداد ارقام کی مقسوم اور مقسوم علیہ کے رتبون کے تفاوت کے بقدر ایک کے زیادہ ہوگی اس مثال مین چار تعداد ارقام ہوگی اب آگے کے ہندسے صفر ہین اسسے معلوم ہوتا ہی کہ کوئی باقی آگے نہین چونکہ تقسیم عکس ضرب کا ہی اسلئے دلیل عمل کی اسطرح ظاہر ہوجائیگی کہ

٢لا٣ + ٣لا٢ + ٤لا + ٧ اور لا٢ + ٢لا + ٥ کو موافق ترکیب مثال منقطع کے ضرب دین اور حاصل ضرب متصلہ کو لا٢ + ٢لا + ٥ پر تقسیم کرین

		٧	٤	٣	٢
			٥	٢	١
		٧	٤	٣	٢
	١٤	٨	٦	٤	
٣٥	٢٠	١٥	١٠		

٣٥	٣٤	٣٠	٢٠	٧	٢	١
	١٤-	٨-	٦-	٤-		٢-
٣٥-	٢٠-	١٥-	١٠-			٥-

٧ ٤ ٣ ٢

اول عمل مین جو اعداد واقع ہوتے ہین وہ دوسرے حصہ عمل کے اعداد سے فنا ہوتی ہین اسلئے جو نتیجہ اخیر کو حاصل

ہوتا ہے وہ مطابق اول سطر کے ہی اسیواسطے وہ خارج قسمت مطلوب ہے
اس مثال مین کچھہ باقی نہین بچا اب اس باب کے ابتدائی کے واسطے کہ ترکیب ایشال منقطع سے جیسا کہ خارج
قسمت دریافت ہوتا ہی ویسا ہی باقی بہی معلوم ہوتی ہے ۷ لا – ٥ کو مقسوم پر اس مثال مین زیادہ
کر دیتے ہین تو ماحصل ٢ لا٥ + ٧ لا٤ + ٣٠ لا٣ + ٣٠ لا٢ + ٤١ لا + ٣٠ اب اسکو ٢ لا٢ + ٢ لا + ٧
پر تقسیم کرو تو خارج قسمت وہی نکلیگا جو پہلے نکلا تہا اور باقی ۷ لا – ٥ رہیگی اب ہم اخر عمل کا ارقام زایدکو
خطوط وحدانی مین داخل کر کے عمل کرتے ہین

		٥	٤	٣	٢	
			٥	٢	١	
(– ٥)	(٧)	٧	٤	٣	٢	
	١٤	٨	٦	٤		
٣٥	٢٠	١٥	١٠			
٣٠	٤١	٣٠	٢٠	٧	٢	١
	– ١٤	– ٨	– ٦	– ٤		– ٣
– ٣٥	– ٢٠	– ١٥	– ١٠			– ٥
(– ٥)	(٧)	٧	٤	٣	٢	

جواب خارج قسمت ٢ لا٣ + ٣ لا٢ + ٤ لا + ٧

باقی ٧ لا – ٥

(٢) ٥ لا٥ – ١٥ لا٣ + ٣٠ لا + ٤٢ کو لا٣ – ٢ لا٢ + ٣ پر تقسیم کرو

خالی مقامات کو صفر سے پر کرو اور عمل اسطرح کرو

٤٢	٣٠	٠	– ١٥	٠	٥	١
		١٠	٢٠	١٠		٢
	٠	٠	٠			٠
– ١٥	– ٣٠	– ١٥				– ٣
– ٢٧	– ١٠	– ٥	٥	١٠	٥	

جواب خارج قسمت ٥ لا٢ + ١٠ لا + ٥

باقی – ٥ لا٢ – ١٠ لا + ٢٧

ان صورتون مین خارج قسمتون اور باقیات کو دریافت کرو

امثلۂ مشق ٣٤

مقسوم	مقسوم علیہ
(١) $٥٠ل^٣ - ٤ل^٢ - ٣ل - ٧٠$	$ل - ٢$
(٢) $٧ل^٤ - ٥ل^٣ - ٣٠٤$	$ل - ٢$
(٣) $٧ل^٤ - ٣ل^٢ + ١$	$ل^٢ - ٢ل + ٣$
(٤) $٥ل^٥ - ٧ل^٣ + ٢ل - ١$	$ل^٣ + ل + ٣$
(٥) $١١ل^٤ - ٢ل^٣ + ٧$	$ل^٢ - ٧$
(٦) $٨ل^٦$	$ل^٣ + ٧ل^٢ - ٣ل + ١$
(٧) $٤ل^٥ - ٧ل^٤ + ٢٥ل^٣ - ١٥ل^٢ + ٨ل + ١٠$	$ل^٢ - ل + ٥$
(٨) $١٠ل^٥ + ٥ل^٤ - ٩٠ل^٣ - ٤٤ل^٢ + ١٠ل + ١$	$ل^٢ - ٩$
(٩) $١٠ل^٦ - ١٠٠$	$ل^٤ + ل^٣ - ل + ١$
(١٠) $٩ل^{١٢} + ٤ل^٦ + ١$	$ل^٦ + ٢ل^٣ + ١$

کسور

کسور جبریہ کی بیان کرنیکا بہی وہی طریقہ ہے جو اعداد مین تہا کہ ایک خط عرضی کے اوپر شمار کنندہ کو اور نیچے اوسکے نسب نما کو لکھتے ہین اور یہہ شمار کنندہ اور نسب نما ارقام مفرد یا کثیر الارقام دونو ہوسکتے ہین قواعد تحویل اور اختصار اور جمع اور تفریق اور ضرب اور تقسیم کسور کی وہی ہین جو حساب کے قواعد ہین فرض کرو کہ ایک کسر کو مختصر الحدین بنانا ہے مختصر الحدین کے معنی یہہ ہین کہ کسر کے حدین یعنی شمار کنندہ اور نسب نما ادنی درجہ کا ہوجاے اسکو کبہی مختصر الارقام بہی کہتے ہین

قاعدہ

(١) شمار کنندہ اور نسب نما کو وفق مشترک اعظم دریافت کرو
(٢) ہر ایک کو وفق اعظم پر تقسیم کرو
پس ماحصل کسر مختصر الحدین ہوگی

مثالین

(١) $\frac{آ^٢ ل^٣ د}{٣ آ^٣ ل د^٣}$ کو مختصر الحدین بناؤ

شمار کنندہ اور نسب نما ارقام مفردہ ہین اونکا وفق اعظم $آ^٢ ل د$ ظاہر معلوم ہوتا ہے اسلئے جواب $\frac{ل^٢}{٣ آ د^٢}$

(٢) $\frac{آ^٢ ل د}{آ ب ل^٣ - آ ح ل^٢ د}$ کو مختصر الحدین بناؤ جواب $\frac{آ}{ب د - ح ل}$

(٣) $\frac{٢ لا^٢ + ٣ لا ی - ٢ ی^٢}{٣ لا^٣ + ٧ لا^٢ ی + ٣ لا ی^٢ + ٢ ی^٣}$ کو مختصر الحدین بناؤ

وفق اعظم شمار کنندہ اور نسب نما کا لا + ٢ ی ہے اسلئے جواب $\frac{٢ لا - ی}{٣ لا^٢ + لا ی + ی^٢}$ ہے

امثلہ مشق ٢٤

کسور ذیل کو مختصر الحدین بناؤ

(١) $\frac{٦ لا^٢ ی^٣}{١٢ لا^٣ ی^٢}$ (٢) $\frac{٥٧ لا^٥ ی^٢ ی}{١٠٠ لا^٣ ی^٢ ی}$

(٣) $\frac{٣٥ م^٤ ن^٢ لا ی}{٩٨ ع ق م^٢ ن ی^٢ ی}$ (٤) $\frac{١٦ ا^٤ ت}{٢٧ ا^٣ ب ج د ر}$

(٥) $\frac{ا لا ی}{ب لا ی + ج لا ی^٢}$ (٦) $\frac{٣ م ع + ٣ م ق}{ع^٢ - ق^٢}$

(٧) $\frac{ا لا ی^٢}{م لا ی + ن لا ی + ع لا ی^٢}$ (٨) $\frac{(ا - لا)^٢}{ا^٢ - لا^٢}$

(٩) $\frac{١ - ٢ لا + لا^٢}{١ - لا^٣}$ (١٠) $\frac{١ - لا^٢}{١ - لا^٣}$

(١١) $\frac{٣ لا^٢ - ٢ لا ی + لا - ی}{٣ لا^٢ + ٢ لا ی + لا + ی}$ (١٢) $\frac{١ - ٢ لا + لا^٢ - ٢ لا^٣}{١ + ٣ لا + لا^٢ + ٣ لا^٣}$

(١٣) $\frac{٢ لا^٣ - ٣ لا^٢ ی - ٣ ی لا^٢ + ٣ ی^٣}{لا^٢ - ی^٢}$ (١٤) $\frac{٣ لا^٣ + لا^٢ + لا - ٢}{لا^٣ - ١}$

(١٥) $\frac{ع^٢ + م ع ق - م ق^٢ - ع ق}{ع^٣ - ق^٣ + ع ق^٢ - ق ع^٢}$ (١٦) $\frac{لا^٤ - لا^٣ - لا + ١}{لا^٤ + لا^٣ - لا - ١}$

دو یا زیادہ کسرون کی تحویل ایسی کسرون کی طرف کرو جنکا نسب نما یکسان ہو

قاعدہ

(١) ہر کسر کو مختصر الحدین بناؤ

(٢) نسب نماؤن کا مشترک ذو اضعاف اقل دریافت کرو بس یہی اقل نسب نما متحد ہوگا

(٣) نسب نما مشترک کو ہر نسب نما پر تقسیم کرو اور خارج قسمتون کو جداگانہ شمار کنندون مین ضرب دو
یہہ حاصل ضرب شمار کنندے مطلوبہ ہونگے

مثالین

(١) ا اور $\frac{ا}{ب}$ کی تحویل اقل نسب نما متحد کی طرف کرو

مقدار ا کو ہم ایک ایسی کسر خیال کرسکتی ہین جسکا نسب نما واحد ہو یعنی $\frac{ا}{١}$ اسلئے

جواب $\frac{اج}{بج}$ و $\frac{ب}{بج}$

(۲) $\frac{1}{لا^2 ی^3}$ اور $\frac{ب}{لا^3 ی^2}$ کا اقل مشترک نسب نما بناؤ

نسب نماؤں کا مشترک ذو اضعاف اقل $لا^3 ی^3$ ہی اسلئے جواب $\frac{ا لا}{لا^3 ی^3}$ و $\frac{ب ی}{لا^3 ی^3}$

(۳) $\frac{م}{لا ی}$ و $\frac{ع}{لا ی^2}$ و $\frac{ق}{لا^2 ی}$ کا اقل مشترک نسب نما بناؤ

جواب $\frac{م لا ی}{لا^2 ی^2}$ و $\frac{ع لا}{لا^2 ی^2}$ و $\frac{ق ی}{لا^2 ی^2}$

امثلہ مشق ۳۵

کسور ذیل کو اقل نسب نما مشترک بناؤ

(۱) $\frac{لا}{ی}$ و $\frac{ی}{ی}$ و $\frac{ی}{لا}$ (۲) $\frac{1}{اب}$ و $\frac{2}{اج}$ و $\frac{3}{بج}$

(۳) $\frac{م}{لا ی}$ و $\frac{ع}{لا ی}$ و $\frac{ق}{ری}$ (۴) $\frac{ا}{ب}$ و $\frac{ج}{بد}$ و $\frac{ر}{س}$

(۵) $\frac{1 - لا}{1 + لا}$ و $\frac{1 + لا}{1 - لا}$ (۶) $\frac{2لا}{لا^2 - ی^2}$ و $\frac{2ی}{لا^2 + ی^2}$

(۷) $\frac{1}{لا - ی}$ و $\frac{1}{لا + ی}$ و $\frac{1}{لا^2 - ی^2}$

اگر درجہ شمار کنندہ کا اعلی بہ نسبت نسب نما کے ہو تو کسر کی تحویل کسر مرکب کی طرف ہوسکتی ہے جسکا ایک جز کثیر الارقام ہو اور ایک جز مکسور ہو

مثالیں

$\frac{3لا^4 + 3لا^3 - 4لا + 1}{لا^2 + 3لا - 3}$ کی کسر مرکب کی طرف تحویل کرو

جواب $3لا^2 - 7لا + 27 - \frac{99لا - 55}{لا^2 + 3لا - 3}$

عمل معکوس یعنی کسر مرکب کی تحویل بالکل کسر کی طرف اسطرح ہوسکتی ہے

مثال

$3لا^2 - 3لا + 2 + \frac{9لا - 7}{3لا^3 + لا^2 + 1}$ کی تحویل بالکل کسر کی طرف کرو

کثیر الارقام $3لا^2 - 3لا + 2$ کو $3لا^3 + لا^2 + 1$ میں ضرب دو اور ما حصل پر $9لا - 7$ زیادہ کرو تو حاصل جمع جو اسطرح حاصل ہوگا کسر مطلوب کا شمار کنندہ ہوگا اسلئے

جواب $\frac{6لا^5 + 2لا^4 - 9لا^3 + 5لا^2 + 3لا^2 + 6لا - 5}{3لا^3 + لا^2 + 1}$

کسور جبریہ کے جمع اور تفریق کے قواعد وہی ہیں جو علم حساب میں کسور کے جمع اور تفریق کے قواعد ہیں یعنی کسور کا نسب نما متحد کرو اور شمار کنندوں کو جمع یا تفریق کر کے شمار کنندہ بناؤ اور نسب نما مشترک نسب نما بناؤ

مثالیں

(١) $\frac{ا}{لا}$ اور $\frac{ب}{د}$ کا حاصل جمع دریافت کرو جواب $\frac{ا د + ب لا}{لا د}$

(٢) $\frac{لا}{ا - د}$ اور $\frac{لا}{ا + د}$ کا حاصل جمع دریافت کرو

کسروں کا نسب نما یکسان کیا تو $\frac{ا لا + لا د}{ا^{٢} - د^{٢}}$ اور $\frac{ا لا - لا د}{ا^{٢} - د^{٢}}$ حاصل ہوئی اسواسطے جواب $\frac{٢ ا لا}{ا^{٢} - د^{٢}}$ ہے

(٣) $\frac{م + ن}{م - ن}$ اور $\frac{م - ن}{م + ن}$ کا فرق دریافت کرو

ان کا نسب نما یکسان کیا تو

$\frac{م^{٢} + ٢ م ن + ن^{٢}}{م^{٢} - ن^{٢}}$ اور $\frac{م^{٢} - ٢ م ن + ن^{٢}}{م^{٢} - ن^{٢}}$

جواب $\frac{٤ م ن}{م^{٢} - ن^{٢}}$

(٤) $\frac{١ - لا}{١ - لا^{٣}}$ اور $\frac{٢ + لا}{٤ - لا^{٢}}$ کا حاصل جمع دریافت کرو

انمیں سے ہر ایک کسر کو مختصر الحدین یعنی $\frac{١}{١ + لا + لا^{٢}}$ اور $\frac{١}{٢ - لا}$ بناؤ

جواب $\frac{٣ + لا^{٢}}{٢ + لا + لا^{٢} - لا^{٣}}$

(٥) $\frac{٢ ا}{(ا - ب)^{٢}}$ اور $\frac{٢ ب}{ا^{٢} - ب^{٢}}$ کا فرق دریافت کرو

کسور میں جز ضربی مشترک $\frac{٢}{ا - ب}$ ہے اسواسطے تفاوت برابر ہے

$$\frac{٢}{ا - ب}\left[\frac{ا}{ا - ب} - \frac{ب}{ا + ب}\right]$$

جواب $\frac{٢}{ا - ب} \times \frac{ا^{٢} + ب^{٢}}{ا^{٢} - ب^{٢}}$

امثلہ مشق ٣٦

(١) $\frac{١}{لا} + \frac{٣ ب}{٢ لا^{٢}}$ (٢) $\frac{ا}{ب} - \frac{ب}{ا}$

(٣) $\frac{لا + د}{لا - د} - \frac{لا - د}{لا + د}$ (٤) $\frac{لا}{د} + \frac{د}{لا} - ٢$

$\frac{16\,(ا+لا)(ا-لا)}{9\,(ا-2لا)(ا+2لا)}$ اور $\frac{3\,(ا-2لا)}{4\,(ا+لا)}$

جواب $\frac{4\,(ا-لا)}{3\,(ا+2لا)}$

امثلہ مشق ٢٧

(١) $\frac{ا\,ب\,لا}{ح\,م\,ی} \times \frac{ا^3\,ب\,لا^2}{د\,ح^2\,ن\,ی^3}$

(٢) $\frac{2\,(ا+ب)}{3\,(ا+لا)}\,لا^2 \times \frac{24}{28}\,\frac{ا^2-لا^2}{ا+ب\,لا}$

(٣) $\frac{4}{7}\cdot\frac{م^2-ن^2}{م+ن} \div \frac{12\,(م-ن)}{35\,(م^2+2م\,ن+ن^2)}$

(٤) $\frac{م^3-ن^3}{(م^2+ن^2)^2} \times \frac{م^2+ن^2}{م-ن}$

(٥) $\frac{ا\,لا^2}{18\,ب\,ی^2} \times \frac{27\,ح\,لا\,ی^2}{2\,ا^2\,لا^3}$

(٦) $\frac{ا^2-ا\,لا}{ا^2-لا^2} \times \frac{ا^2-ب^2}{ا^2-2ا\,ب+ب^2} \times \frac{ا-ب}{ا^2+ا\,ب}$

(٧) $\frac{م^2\,ن}{م^2-ن^2} \div \frac{3\,م\,ن^2}{م^2+م\,ن}$

(٨) $\frac{(لا^2-ی^2)}{(ا+ب)^2}\,\frac{لا\,ی}{} \div \frac{لا\,ی}{ا^2}\,\frac{(لا+ی)}{ا^2+ا\,ب}$

(٩) $\frac{(ا-م)^2}{ع^3-و^3} \div \frac{ا^3-م^3}{ع^2+ع\,و+و^2} \times \frac{ع^3-ع^2\,و}{ا^2-2ا\,م+م^2}$

(١٠) $\frac{لا^2-ی^2}{ا^2\,ب+ا\,ب^2} \times \frac{ا+ب}{(لا+ی)^2} \div \frac{(لا-ی)^2}{ا\,ب}$

مقادیر اصم

کسی جبریہ جملہ یا عدد کا جذر المربع علامت $\sqrt{\ }$ سے اور جذر المکعب $\sqrt[3]{\ }$ اور علی العموم ن وان جذر $\sqrt[n]{\ }$ سے تعبیر ہوتا ہے یہہ علامت $\sqrt{\ }$ اختصار کے واسطے لکھی جاتی ہے وہ ابتدا حرف اوس لفظ کا ہے جسکا ترجمہ ہم جذر کہتے ہیں جذر کا قوت نمان ہمیشہ لکھا جاتا ہے مگر جذر المربع کی صورت میں محذوف ہوتا ہے

جن مقادیر یا جملون پر یہہ علامت متصرف ہو اور وہ ارقام محدودہ میں نہ بیان ہو سکتی ہون تو ایسی مقادیر کو غیر ناطقہ یا اصم کہتے ہیں مثلاً $\sqrt{8}$ اور $\sqrt[3]{20}$ اور $\sqrt[4]{12}$ وغیرہما غیر ناطقہ یا اصم اعداد ہیں کیونکہ اونکو ارقام محدود میں نہیں بیان کر سکتی اور برخلاف اسکی $\sqrt{16}$ اور $\sqrt[3]{27}$ اور $\sqrt[4]{16}$ وغیرہما ہیں جنپر علامتین تو وہی ہین جو پہلے اعداد پر تہین مگر وہ ارقام محدود میں بیان ہو سکتی ہین اور ۴ و ۳ و ۲ وغیرہما کے برابر ہین اسلئے وہ غیر ناطقہ یا اصم نہیں ہین

ذیل مین مثالین اصم یا غیر ناطقہ جبریہ جملون کی لکھی ہین

$\sqrt[2]{ا^2}$ اور $\sqrt[2]{ا + ب\,لد}$ اور $\sqrt[3]{ا^3 + لد^3}$ اور $\sqrt[4]{ا^2 - لد^2}$

یہہ سب اصم ہین اسلیئے کہ کوئی اونمین ایسی جملون مین جنکی رقمون کی تعداد محدود ہو نہین تحویل ہو سکتی برخلاف اسکے

$\sqrt[2]{ا^2}$ اور $\sqrt[2]{ا^4}$ اور $\sqrt[2]{ا^2 + ۲\,ا\,لد + لد^2}$ اور $\sqrt[3]{(م^3)}$

$\sqrt[3]{ا - ۳\,لد + ۳\,لد^2 - لد^3}$

یہ علامتین ہی ہین جو پہلی تہین مگر باوجود اسکے اونمین سی ہر ایک کی تحویل ایسی جملون کی طرف ہوسکتی جنکی رقمین تعداد مین محدود ہون یعنی ا و $ا^2$ و (ا + لد) و $م^3$ و (ا − لد)

اسلیئے وہ اصم یا غیر ناطقہ نہین ہین

اب کسی جملہ کے ناطق اور غیر ناطق یعنی اصم دریافت کرنیکا طریقہ یہہ ہے کہ اگر بادی النظر مین یہہ بات نہ معلوم ہو تو جو قواعد نزول نکالنی کے اس رسالہ اور حساب کے رسالہ مین لکھی ہین اونکے موافق عمل کرو پس اگر یہہ نزول ایسی جملون مین نہ تحویل ہوسکی کہ جنکی رقمونکی تعداد محدود ہو تو اونکو اصم یا غیر ناطقہ جانو

اب اصم دو طرح کے ہوتے ہین ایک حقیقی دوسری خیالی

اگر علامت جذر کی جفت ہو اور اوسکے اندر مقدار منفی ہو تو جان لینا چاہیے کہ اصم خیالی ہی کیونکہ سب جفت جذر مثبت ہوتی ہین اسلیئے یہہ ناممکن ہی کہ دوسری مرتبہ کا یا چوتہی مرتبہ یا چہٹی مرتبہ یا کسی اور جفت مرتبہ کا جذر مقدار منفیہ کا نکل سکے اسی سبب سے ایسی جملون کو جیسی کہ $\sqrt{-ا^2}$ اور $\sqrt[4]{-ا^2}$ خیالی جملے کہتے ہین اگرچہ کسی طرح صحیح بیان نہین ہوسکتے لیکن تحقیقات ریاضیہ مین وہ شامل اور جملون کے کام مین آتے ہین اور اون پر تمام اعمال رموز جبریہ کے کیے جاتے ہین

ضابطہ قوت نما

جبریہ جملون پر جب علامت جذر متصرف ہو تو اونکی قیمت بیان کرنیکا طریقہ کتاب اون مقدمات سی جو صفحات ۸ و ۹ پر بیان ہوئی ہی آسانی سے اخذ ہو سکتا ہی جو اصول ان مقدمات و نتایج مین بیان ہوئے اونہین کو وسعت دیکر منفی اور مکسور قوت نما اون کے بیان کرنیکا طریقہ کتاب اخذ کرلین

علامت جذر المربع کی صفت سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ

$$\sqrt{ا} \times \sqrt{ا} = ا$$

اور اسی مقدمہ کی توسیع سے

$$ا^{\frac{1}{2}} \times ا^{\frac{1}{2}} = ا$$

ان مساواتون کے مقابلہ کرنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ ا کا جذر المربع $ا^{\frac{1}{2}}$ سے مناسب طور پر تعبیر ہو سکتا ہے

علامت $\sqrt[م]{\ }$ کی صفت سے یہہ ظاہر ہوتا ہے کہ

$$\left(\sqrt[م]{ا}\right)^{م} = ا$$

لیکن نتیجہ ا سے ظاہر ہوتا ہے

$$\left(ا^{\frac{1}{م}}\right)^{م} = ا$$

لیکن نتیجہ ا سے ظاہر ہوتا ہے کہ

اسواسطے ظاہر ہے کہ م وان جذر ا کا $= ا^{\frac{1}{م}}$ سے مناسب طور پر تعبیر ہو سکتا ہے

اور اسواسطے م وان جذر ا کا ($\frac{1}{م}$) وین قوت خیال کر سکتے ہین

اگر م = ن مساوات مین ہو

$$\frac{ا^{م}}{ا^{ن}} = ا^{م-ن}$$

اسے یہہ استنباط ہوتا ہے کہ

$$ا^{0} = 1$$

اگر ن > م تو فرض کرو کہ ن = م + ع

$$\frac{ا^{م}}{ا^{م+ع}} = \frac{1}{ا^{ع}}$$

لیکن $ا^{م+ع} = ا^{م} \times ا^{ع}$ اسیواسطے $ا^{م}$ پر اوپر اور نیچے کی رقمون پر تقسیم کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{1}{ا^{ع}} = ا^{-ع}$$

اسے یہہ ظاہر ہوتا ہی کہ ا کی مثبت قوت کا متکافی منفی قوت نما سے تعبیر ہوتا ہے

یعنی ع وین قوت کا متکافی مساوی (−ع) وین قوت کی ہے

بعض اوقات جو ایسا ہوتا ہی کہ ہم ۱۸ صفحہ کی (۱) اور (۲) مساواتون سے ثابت کرتے ہین کہ $\sqrt{ا} = ا^{\frac{1}{2}}$ اور $ا^{-ع} = \frac{1}{ا^{ع}}$ بالکل غلط ہے کیونکہ یہہ مساواتین اس حالت مین فرض کی گئی ہین کہ قوت تمام اور ن مثبت صحاح ہون اسواسطے ہم کسی نتائج کے نکالنے کے مجاز

اوس حالت مین نہین ہین کہ قوت نما ان شرائط کے ساتہہ نہ فرض کئے گئی ہون کے سبب سے یہہ صحیح ہے کہ مساوات $ا^{م} \times ا^{ن} = ا^{م+ن}$ کے فرض کرنے سے ہم معنی قوت نما ایسی وسیع کر سکتے ہین کہ اونمین اعداد مکسور اور منفی بہی داخل ہو جائین اور اس سبب سے ہم اون مقادیر جبریہ کی قیمتون کو جنپر علامات جذریہ متصرف ہون باسانی بیان کر سکتے ہین اور اونکا طریقہ کتابت مختصر بنا سکتے ہین اس فرض کے موافق یا اور فرضون کے مطابق جو اس قبیل کے ہون ہم علم حساب کے احاطہ سے جسکو حسابیہ الجبرا کہتے ہین باہر نکل جاتے ہین اور رموزیہ الجبرا مین آجاتی ہین اور اس رموزیہ الجبرا مین اعمال جو اعداد اور اونکی ترکیبون پر کئے جاتی ہین وہ وسعت پاکر تمام قسم کی مقادیر سے متعلق ہو جاتے ہین جس اصل پر بنا اس فرض کی ہی پی کاک صاحب نے اپنے جبر مقابلہ مین اوسکا نام اصل مستقل صور متساوی لہ رکہا ہی اور اوسکو ان الفاظ مین بیان کیا ہی

جب رموز صورت مین عام اور قیمت مین خاص ہون تو صور جبریہ کے مساوی لہ اوسیطرح مساوی لہ رہینگی جبکہ رموز کی قیمت بہی اونکی صورت کی طرح عام ہو جاوے

پس چونکہ قوت تمام اور ن ان جملون مین جنسے کہ مساوات بنتی ہے کہ

$$ا^{م} \times ا^{ن} = ا^{م+ن}$$

صورت مین عام ہین مگر قیمت مین خاص ہین یعنی مثبت صحاح ہین اسواسطے ہم بحکم اصل مستقل صور متساوی لہ کے رموزیہ الجبرا مین ان جملون کو متساوی لہ باہم ان قوت نماؤن کے عام قیمت کی حالت مین کر سکتی ہین

مثالین

(۱) لہ کی ن وین جذر کے م وین قوت کو قوت نما مکسور مین بیان کرو چونکہ ن وان جذر ($\frac{۱}{ن}$) وین قوت ہی تو بموجب نتیجہ ۸ اصفحہ کے یہہ جواب حاصل ہوگا کہ $(\sqrt[ن]{لہ})^{م} = لہ^{\frac{م}{ن}}$

(۲) لہ کی م وین قوت کا ن وان جذر قوت نما مکسور مین بیان کرو بموجب نتیجہ ۲ صفحہ کے جواب $\sqrt[ن]{لہ^{م}} = لہ^{\frac{م}{ن}}$

ان نتائج سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ ن وین جذر کی م وین قوت برابر ہوتی ہے م وین قوت کے ن وین جذر کے یعنی علی العموم یہہ ہے کہ ایک ہی مقدار پر اعمال صعود اور نزول کے متواتر

کئے جائیں اور ان کی ترتیب خواہ کچھ ہی ہو نتیجہ ایک ہی حاصل ہوگا

(۳) اس جذریہ جملہ $\frac{\sqrt[3]{(\text{ا}-\text{لا})^{2}}}{\sqrt[4]{(\text{م}+\text{لا})^{5}}}$ کو قوت نما کسور اور منفی میں بیان کرو

جواب $(\text{ا}-\text{لا})^{\frac{2}{3}}(\text{م}+\text{لا})^{-\frac{5}{4}}$

(۴) $\text{لا}+\text{ء}^{\frac{1}{2}}+\text{ی}^{\frac{1}{3}}$ کو $\text{لا}-\text{ء}^{\frac{1}{2}}+\text{ی}^{\frac{1}{3}}$ میں ضرب دو

$$\text{لا}+\text{ء}^{\frac{1}{2}}+\text{ی}^{\frac{1}{3}}$$
$$\text{لا}-\text{ء}^{\frac{1}{2}}+\text{ی}^{\frac{1}{3}}$$
$$\text{لا}^{2}+\text{لا}\,\text{ء}^{\frac{1}{2}}+\text{لا}\,\text{ی}^{\frac{1}{3}}$$
$$-\text{لا}\,\text{ء}^{\frac{1}{2}}-\text{ء}-\text{ء}^{\frac{1}{2}}\text{ی}^{\frac{1}{3}}$$
$$+\text{لا}\,\text{ی}^{\frac{1}{3}}+\text{ء}^{\frac{1}{2}}\text{ی}^{\frac{1}{3}}+\text{ی}^{\frac{2}{3}}$$
$$\text{لا}^{2}-\text{ء}+2\,\text{لا}\,\text{ی}^{\frac{1}{3}}+\text{ی}^{\frac{2}{3}}$$

(۵) $\text{لا}^{\frac{3}{2}}-\text{ء}^{\frac{3}{4}}$ کو $\text{لا}^{\frac{1}{2}}-\text{ء}^{\frac{1}{4}}$ پر تقسیم کرو

$$\text{لا}^{\frac{1}{2}}-\text{ء}^{\frac{1}{4}}\;)\;\text{لا}^{\frac{3}{2}}-\text{ء}^{\frac{3}{4}}\;(\;\text{لا}+\text{لا}^{\frac{1}{2}}\text{ء}^{\frac{1}{4}}+\text{ء}^{\frac{1}{2}}$$
$$\text{لا}^{\frac{3}{2}}-\text{لا}\,\text{ء}^{\frac{1}{4}}$$
$$\text{لا}\,\text{ء}^{\frac{1}{4}}-\text{ء}^{\frac{3}{4}}$$
$$\text{لا}\,\text{ء}^{\frac{1}{4}}-\text{لا}^{\frac{1}{2}}\text{ء}^{\frac{1}{2}}$$
$$\text{لا}^{\frac{1}{2}}\text{ء}^{\frac{1}{2}}-\text{ء}^{\frac{3}{4}}$$
$$\text{لا}^{\frac{1}{2}}\text{ء}^{\frac{1}{2}}-\text{ء}^{\frac{3}{4}}$$

امثلہ مشق ۲۸

(۱) $2\,\text{لا}^{\frac{1}{2}}\,\text{ء}^{\frac{1}{5}}$ کو ۱۰ ویں قوت میں اٹھاؤ

(۲) $\text{لا}^{\frac{3}{4}}\,\text{ء}^{\frac{5}{12}}\,\text{ی}^{\frac{7}{8}}$ کو ۲۴ ویں قوت میں اٹھاؤ

(۳) جذر المکعب $108\sqrt[4]{\text{لا}^{5}}\times\sqrt[3]{\text{لا}^{6}}$ کا نکالو

(۴) $\text{ا}^{\frac{2}{3}}+\text{ا}^{\frac{1}{3}}\text{ب}^{\frac{1}{3}}+\text{ب}^{\frac{2}{3}}$ کو $\text{ا}^{\frac{1}{3}}-\text{ب}^{\frac{1}{3}}$ میں ضرب دو

(۵) $\frac{\sqrt[3]{\text{لا}^{2}}\times\sqrt[4]{\text{لا}^{3}}}{\sqrt[4]{\text{لا}}\times\sqrt[3]{\text{لا}}}$ کو لا کی ایک قوت نما میں بیان کرو

(۶) $\text{لا}^{\frac{1}{2}}+\text{لا}+\text{لا}^{\frac{3}{2}}$ کو $\text{لا}^{\frac{1}{2}}-\text{لا}+\text{لا}^{\frac{3}{2}}$ میں ضرب دو

(۷) $\text{لا}^{\frac{2}{3}}-\text{ء}^{\frac{2}{3}}$ کو تیسری قوت میں اٹھاؤ

(۸) $\text{ا}^{\frac{3}{2}}-\text{ا}\,\text{ب}^{\frac{1}{2}}+\text{ا}^{\frac{1}{2}}\text{ب}-\text{ب}^{\frac{3}{2}}$ کو $\text{ا}^{\frac{1}{2}}+\text{ب}^{\frac{1}{2}}$ میں ضرب دو

(۹) $\text{لا}-\text{ء}$ کو $\text{لا}^{\frac{1}{3}}-\text{ء}^{\frac{1}{3}}$ پر تقسیم کرو

(۱۰) $\text{ا}-\text{ب}$ کو $\text{ا}^{\frac{1}{3}}-\text{ب}^{\frac{1}{3}}$ پر تقسیم کرو

(۱۱) $\text{ء}^{\frac{3}{2}}-\text{لا}^{\frac{3}{2}}$ کو $\text{ء}^{\frac{1}{2}}-\text{لا}^{\frac{1}{2}}$ پر تقسیم کرو

(۱۲) $ی^{\frac{5}{2}}$ − $لا^{\frac{5}{2}}$ کو $ی^{\frac{1}{2}}$ − $لا^{\frac{1}{2}}$ پر تقسیم کرو

(۱۳) $ا^{\frac{3}{4}}$ + $ب^{\frac{3}{4}}$ کو $ا^{\frac{1}{4}}$ + $ب^{\frac{1}{4}}$ پر تقسیم کرو

(۱۴) $ا^{\frac{5}{4}}$ + $ب^{\frac{5}{4}}$ کو $ا^{\frac{1}{4}}$ + $ب^{\frac{1}{4}}$ پر تقسیم کرو

(۱۵) ی − لا کو $ی^{\frac{1}{ن}}$ − $لا^{\frac{1}{ن}}$ پر تقسیم کرو

(۱۶) $ی^{\frac{م}{ن}}$ − $لا^{\frac{م}{ن}}$ کو $ی^{\frac{1}{ن}}$ − [illegible] پر تقسیم کرو

اعمال اصم

مقادیر اصم اکثر واقع ہوتے ہین اسلیئے ضرور ہے کہ اونکی خاص قاعدے بیان کیئے جائین تاکہ اون پر اعمال جبریہ چل سکین

حدود

اصم کا قوت نما عدد مکسور ہوتا ہے اور موافق ضابطہ قوت نما کے یہہ عدد مکسور اوس مقدار کی قوت کو تعبیر کرتا ہے جو علامت جذر کے ماتحت ہو

اصم متشابہ وہ مقادیر ہین کہ جنکی اندر ایک ہی مقدار اصم ہو یا ہو سکے جیسے $۳\sqrt{لا}$ اور $۵\sqrt{لا}$ متشابہ مقادیر اصم ہین اور نیز ۲م $\sqrt[3]{(ا - لا)}$ اور ۳ن $\sqrt[3]{(ا - لا)}$ بھی متشابہ مقادیر اصم ہے اور برخلاف اسکے $۳\sqrt{۵}$ اور $۲\sqrt{۳}$ غیر متشابہ ہین

مفرد مقادیر اصم درجہ دوم کی وہ ہین جنمین ایک ہی رقم ہو اور قوت نما $\frac{1}{2}$ ہو جیسے کہ $\sqrt{ا}$ اور $۵\sqrt{۳}$ کہ مفرد مقادیر اصم درجہ دوم کی ہین

مقادیر اصم درجہ دوم کی ثنائی وہ ہین جنمین ایک رقم یا دونو رقمین مفرد مقادیر اصم درجہ دوم کی ہون

مقادیر اصم درجہ دوم کو مزدوج کہتے ہین جب اونمین ایک ہی رقمین علامات + اور − کے ساتھہ مربوط ہون جیسے کہ $ا + \sqrt{ب}$ اور $ا - \sqrt{ب}$ صورت مین مزدوج ہین

مقادیر اصم کی تحویل اور اختصار کے واسطے یہہ قواعد اور مقدمات ثابت ہین

مقدمہ

جب دو مقادیر اصم کا قوت نما ایک ہی ہو اونکا حاصل ضرب یا خارج قسمت اسطرح حاصل ہوتا ہے کہ علامت جذر کے ماتحت جو مقداریں ہو اونکو ضرب دو یا تقسیم کرو اور حاصل پر علامت جذر مشترک یا قوت نما لکہدو

یہہ مقدمہ اصل متعلق صور تساوی کے سے مستنبط ہوتا ہے اگر ا اور ب اور م مثبت صحاح ہون تو یہہ ظاہر ہے کہ

$$\sqrt[م]{ا} \times \sqrt[م]{ب} = \sqrt[م]{(اب)}$$

$$\frac{\sqrt[م]{ا}}{\sqrt[م]{ب}} = \sqrt[م]{\left(\frac{ا}{ب}\right)}$$

یہہ صور تساوی اوسمین ا اور ب اور م اگرچہ خاص قیمت اور عام صورت رکہتی ہین اونہین وہ صورتین بہی داخل ہین جو مقدمہ مین بیان ہوئی ہین

مثالین

(۱) $\sqrt{ا}$ کو $\sqrt{لا}$ مین ضرب چونکہ $\sqrt{ا} = ا^{\frac{1}{2}}$ اور $\sqrt{لا} = لا^{\frac{1}{2}}$ تو بموجب مقدمہ کے

$$\sqrt{ا} \times \sqrt{لا} = ا^{\frac{1}{2}} \times لا^{\frac{1}{2}} = (ا لا)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ا لا}$$

(۲) $\sqrt{ا}$ کو $\sqrt{لا}$ پر تقسیم کرو

$$\sqrt{\frac{ا}{لا}} = \left(\frac{ا}{لا}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{ا^{\frac{1}{2}}}{لا^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{ا}}{\sqrt{لا}}$$

مقدمہ ۲

ایک مقدار خواہ ناطق یا غیر ناطق ہو اوسکی صورت ایک اصم کی جسکا قوت نما معلوم ہو اسطرح بن سکتی ہین کہ اس قوت نما کے نسب نما کے موافق صعود اوس مقدار کا لین اور ماحصل کو علامت جذر کے اندر لکہدین

مثالین

(۱) ا کو مقدار اصم درجہ دوم بناؤ جواب $\sqrt{ا^2}$

(۲) $م^{\frac{2}{3}}$ کی تحویل ایسی مقدار اصم کی طرف کرو کہ جسکا قوت نما $\frac{1}{6}$ ہو جواب $\sqrt[6]{م^4}$

مقدمہ ۳

ایک مقدار اصم کا سر علامت جذر کے اندر آسکتا ہے اگر اوسکو اصم کی صورت مین تحویل کر لین

مثالین

(۱) ا $\sqrt{لا}$ مین سر کو علامت جذر کے اندر لاؤ بموجب مقدمہ ۲ کے $ا = \sqrt{ا^2}$

اور بموجب مقدمہ ا کے $\sqrt{ا^2} \times \sqrt{لا} = \sqrt{ا^2 لا}$ جواب ہے

(۲) $-۳\sqrt[3]{(۱-لا)}$ کے سر کو علامت جذر کے اندر لاؤ

چونکہ $(-۳)^3 = -۲۷$ اسلئے جواب $\sqrt[3]{-۲۷(۱-لا)}$

(۳) ۵ $\sqrt{۷}$ مین سر کو علامت جذر کے اندر داخل کرو جواب $\sqrt{۱۷۵}$

(۴) $\sqrt[12]{m}\ \sqrt[3]{(a^2 - x^2)}$ کے سر ۱۲م کو علامت جذر کے اندر لاؤ

جواب $\sqrt[12]{m^{\frac{3}{4}}(a^2 - x^2)}$

مقدمہ ۴

ہر ایک مقدار کو قوت نما معلوم کے نیچے اسطرح لکھ سکتے ہین کہ اول اوسکے قوت نما کو اس قوت نما معلوم کر تقسیم کرین

فرض کرو $a^{\frac{ع}{ق}}$ کو قوت نما $\frac{ن}{م}$ کے نیچے لکھنا ہو

چونکہ $\frac{ع}{ق} = \frac{ع}{ق} \cdot \frac{م}{ن} \cdot \frac{ن}{م}$ اسواسطے $a^{\frac{ع}{ق}} = a^{\frac{ع}{ق} \cdot \frac{م}{ن} \cdot \frac{ن}{م}}$

اور بموجب نتیجہ ۱۸ صفحہ بموجب اصل مستقل صورت مساوی ہو گی

$$a^{\frac{ع}{ق} \cdot \frac{م}{ن} \cdot \frac{ن}{م}} = \left(a^{\frac{عم}{قن}}\right)^{\frac{ن}{م}}$$

نتیجہ ایک مقدار جو قوت نما کے ماتحت ہو اوسکا سر اس قوت نما کے نیچے اسطرح اسکتا ہی کہ بموجب اس مقدمہ کے اوسکو قوت نما کی صورت مین تحویل کر لین

مثالین

(۱) $m^{\frac{3}{5}}$ کی تحویل قوت نما $\frac{1}{10}$ کی طرف کرو جواب $\left(m^{\frac{6}{7}}\right)^{\frac{1}{10}}$

(۲) $\sqrt[3]{(a^2 - x^2)^2}$ کی تحویل قوت نما $\frac{5}{6}$ کی طرف کرو جواب $\left[\sqrt[5]{(a^2 - x^2)^{\frac{4}{5}}}\right]^{\frac{5}{6}}$

(۳) $+ a x^{\frac{1}{ن}}$ مین سر a کو قوت نما کے ماتحت لاؤ چونکہ $a = \left(a^{م}\right)^{\frac{1}{م}}$ جواب $\left(a^{م} x\right)^{\frac{1}{م}}$

(۴) $27(a^2 - x^2)^{\frac{1}{3}}$ مین سر ۲۷ کو قوت نما کے ماتحت لاؤ جواب $\left[9(a^2 - x^2)\right]^{\frac{3}{2}}$

مقدمہ ۵

اگر علامت جذر کی ماتحت ایک جز ضربی واقع ہو تو وہ مقدار اصم کا سر علامت جذر کے اندر سے نکلکر اسطرح بن سکتا ہے کہ اوسکا جذر موافق قوت نما مقدار اصم کے لیلین

فرض کرو کہ مقدار اصم $\sqrt[ن]{a ع}$ ہو اور یہہ بموجب ضابطہ قوت نما کے برابر ہے

$$(a ع)^{\frac{1}{ن}} = a^{\frac{1}{ن}} \times ع^{\frac{1}{ن}} = \sqrt[ن]{a} \times \sqrt[ن]{ع}$$

مثالین

(۱) مقدار اصم $\sqrt{a^2 x}$ سے اول جز ضربی کو منتقل کرو جواب $a \sqrt[3]{x}$

(۲) اول جز ضربی $\sqrt[5]{m^5(a^2 - x^2)}$ کو منتقل کرو جواب $m \sqrt[5]{a^2 - x^2}$

(۳) تمام مجذور اجزاء ضربی اس مقدار اصم سے منتقل کرو

$\sqrt[۳]{۲۴۳\ م^۵ (ا^۲ - ل^۲)(ا - ل)}$

جواب $۹\ م^۲ (ا - ل) \sqrt[۳]{م (ا + ل)}$

مقدار اصم کی تحویل مساوی و مختصر صورت مین کرو

(۱) علامت جذر کے اندر جو مقدار ہو اوسکو اجزاء ضربی اولی مین تحلیل کرو

(۲) علامت جذر کے اندر سے ہر جزء ضربی کو منتقل کرو جسکا قوت نما برابر یا مقدار اصم کی قوت نما کے ہو یا اوسکا اضعاف ہو

پس جو باقی رہتی ہے وہ مقدار اصم سادہ صورت ہوتی ہے

(۱) $۵\sqrt{۱۰۸}$ کو نہایت سادی صورت مین تحویل کرو چونکہ $۱۰۸ = ۲^۲ \times ۳^۳$ $= ۲^۲ \times ۳^۲ \times ۳$ سے مستنبط ہوتا ہے کہ $\sqrt{۱۰۸} = ۶\sqrt{۳}$ اسلئے

جواب $۳۰\sqrt{۳}$

(۲) $۹\sqrt[۳]{۱۹۴۴}$ کو سادہ صورت بناؤ چونکہ $۱۹۴۴ = ۲^۳ \times ۳^۵ = ۲^۳ \times ۳^۳ \times ۳^۲$

جواب $۵۴\sqrt[۳]{۹}$

(۳) $\sqrt[۳]{۲۷\ لا^۵ (ا^۳ - لا^۳)(لا - ا)^۲}$ کو سادہ صورت مین بناؤ

جواب $۳\ لا^۲ (ا - لا) \sqrt[۳]{لا (ا^۲ + ا\ لا + لا^۲)}$

دو یا زیادہ مقادیر اصم کا قوت نما متحد بناؤ یا ایک ہی علامت جذر کے ماتحت لاؤ

قاعدہ

(۱) مقادیر اصم کی قوت نماؤن کی کسرون کا نسب نما متحد بناؤ

(۲) جو مقادیر کہ علامات جذر کے اندر ہون اونکو موافق شمار کنندون کی قوتامین اٹھاؤ قوت نما مشترک متکافی نسب نما مشترک کا ہوگا

مثالین

(۱) $۲\sqrt{۳}$ اور $۵\sqrt[۳]{۱۱}$ کا قوت نما متحد کرو $\sqrt{۳} = ۳^{\frac{۱}{۲}} = ۳^{\frac{۳}{۶}}$ $= \sqrt[۶]{۲۷}$ اور $\sqrt[۳]{۱۱} = ۱۱^{\frac{۱}{۳}} = ۱۱^{\frac{۲}{۶}} = \sqrt[۶]{۱۲۱}$

جواب $۳\sqrt[۴]{۲۷}$ اور $۵\sqrt[۴]{۱۲۱}$

(۲) $\text{ا}\sqrt[۳]{\text{ا}^۴}$ اور $\text{ب}\sqrt[۵]{\text{ب}^۳}$ کی ایک ہی علامت جذر کی طرف تحویل کرو

جواب $\text{ا}\sqrt[۱۵]{\text{ا}^{۲۰}}$ اور $\text{ب}\sqrt[۱۵]{\text{ب}^۹}$

مقادیر اصم کی جمع اور تفریق کا

قاعدہ

مقادیر اصم کو سادہ صورت بناؤ اگر وہ متشابہ ہوں تو اونکی امثال کو جمع کرلو اور اگر متشابہ نہوں تو اونکو جمع اونکے علامتوں کے جس ترتیب سی چاہو لکھدو

مثالین

(۱) $\sqrt{۱۰۸}$ اور $۲\sqrt{۶۷۵}$ کو جمع کرو جواب $\sqrt{۱۰۸} = ۶\sqrt{۳}$ اور $۲\sqrt{۶۷۵} = ۳۰\sqrt{۳}$ جواب $۳۶\sqrt{۳}$

(۲) $۳\sqrt[۳]{۵۴} - ۲\sqrt[۳]{۱۶}$ کو ایک مقدار اصم بناو جواب $۵\sqrt[۳]{۲}$

(۳) $\sqrt{۹\,\text{لا}^۳\text{ی}^۲} + ۳\sqrt{۴\,\text{لا}^۳\text{ی}^۲} - ۵\sqrt{۱۶\,\text{لا}^۳\text{ی}^۲}$ کو مقدار اصم مفرد بناؤ

جواب $\text{لا ی}\,(۳\,\text{ی} + ۴\,\text{لا ی} - ۳۰)\sqrt{\text{لا}}$

مقادیر اصم کی ضرب اور تقسیم کا

قاعدہ

مقادیر اصم کا ایک ہی قوت نما بناؤ اور علامت جذر کے جو ماتحت مقادیر ہوں اونکو ضرب یا تقسیم کرو اور حاصلضرب یا خارج قسمت کو علامت مشترک کے نیچے لکھدو

مثالین

(۱) $۳\sqrt{۵}$ کو $۲\sqrt{۳}$ میں ضرب دو جواب $۶\sqrt{۱۵}$

(۲) $۴\sqrt{۳}$ اور $۵\sqrt[۳]{۲}$ میں ضرب دو چونکہ $\sqrt{۳} = ۳^{\frac{۱}{۲}} = ۳^{\frac{۳}{۶}} = \sqrt[۶]{۲۷}$

اور $\sqrt[۳]{۲} = ۲^{\frac{۱}{۳}} = ۲^{\frac{۲}{۶}} = \sqrt[۶]{۴}$ جواب $۲۰\sqrt[۶]{۳^۳\,۲^۲}$

(۳) $۱۰\sqrt[۳]{۴}$ کو $۵\sqrt[۴]{۲}$ پر تقسیم کرو جواب $۲\sqrt[۱۲]{۳۲}$

مقدمہ ۶

اصم درجہ دوم ثنائی اور اوسکی مزدوج کا حاصلضرب ناطقہ ہوتا ہے،

فرض کرو کہ اصم درجہ دوم ثنائی $ا + \sqrt{ب}$ ہی تو اوسکا مزدوج $ا - \sqrt{ب}$ ہی

$$(ا + \sqrt{ب})(ا - \sqrt{ب}) = ا^2 - ب$$

اگر مقادیر اصم $\sqrt{ا} + \sqrt{ب}$ اور اوسکا مزدوج $\sqrt{ا} - \sqrt{ب}$ ہو تو

$$(\sqrt{ا} + \sqrt{ب})(\sqrt{ا} - \sqrt{ب}) = ا - ب$$

جن کسور کے نسب نما مقادیر اصم درجہ دوم ثنائی ہون اونکے نسب نماکے ناطقہ بنانے کا

قاعدہ

نسب نما مین جو مقدار اصم ثنائی ہو اوسکی مزدوج کو کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما مین ضرب دو

مثالین

(۱) $\frac{۲}{\sqrt{۷} + \sqrt{۳}}$ کا نسب نما ناطق بناؤ اوپر اور نیچے $\sqrt{۷} - \sqrt{۳}$ مین ضرب دو تو

جواب $\frac{\sqrt{۷} - \sqrt{۳}}{۲}$

(۲) $\frac{\sqrt{۳} + \sqrt{۲}}{\sqrt{۳} - \sqrt{۲}}$ کے نسب نما کو ناطق بناؤ جواب $۵ + ۲\sqrt{۶}$

(۳) $\frac{\sqrt{ا + لا} + \sqrt{ا - لا}}{\sqrt{ا + لا} - \sqrt{ا - لا}}$ کے نسب نما کو ناطق بناؤ جواب $\frac{ا + \sqrt{ا^2 - لا^2}}{لا}$

(۴) کسر $\frac{۳ - \sqrt{۷}}{۳ + \sqrt{۷}}$ کی قیمت کا حساب پانچ مرتبہ کی اعشاریہ تک کرو

نسب نما کو ناطق بناؤ تو $۸ - ۳\sqrt{۷}$ حاصل ہوگا جواب ۰۶۲۷۸ء۰

(۵) $\frac{۷ + \sqrt{۴۸}}{۲}$ کو $\frac{۳ - \sqrt{۲}}{۳ + \sqrt{۲}}$ سے تفریق کرو

نسب نما کو ناطق بناؤ اور اوسکی تحویل کرو تو یہہ جواب حاصل ہوگا $\frac{۳۱(۱ - \sqrt{۲})}{۳}$

امثلہ مشق ۲۹

(۱) $۲\sqrt{۷}$ و $۳\sqrt[۳]{۵}$ اور $\sqrt[۳]{۴}$ $\sqrt{ا}$ $\sqrt[۳]{(ا + لا)}$

کے اشکال کو علامت جذر کے اندر لاؤ

(۲) $\sqrt{۶۶۱۵}$ اور $\sqrt[۳]{۳۵۹۲}$ اور $\sqrt[۳]{۲۵۹۲}$ کی سادہ صورت بناؤ

(۲۲) مقادیر اصم $\sqrt[3]{لا^۲ + ۲ لا ی + لا ی^۲}$ اور $\sqrt[3]{لا^۳ - ۲ لا ی + لا ی^۲}$ کا مجموعہ اور فرق دریافت کرو

(۲۳) $\sqrt[3]{۲ لا - ۱}$ اور $\sqrt[3]{۲ لا + ۳}$ اور $\sqrt[3]{۲ لا + ۱}$ کو باہم ضرب دو

(۲۴) $\sqrt{\frac{لا + ۱}{لا - ۱}}$ کو $\sqrt{\frac{لا - ۱}{لا + ۱}}$ پر تقسیم کرو

(۲۵) $\frac{\sqrt{ب} + \sqrt{ی}}{\sqrt{لا} - \sqrt{ی}}$ اور $\frac{\sqrt{لا} - \sqrt{ی}}{\sqrt{لا} + \sqrt{ی}}$ کا مجموعہ اور تفاوت دریافت کرو

(۲۶) $\frac{۱}{۱ - \sqrt{۱ - لا^۲}}$ اور $\frac{۱}{۱ + \sqrt{۱ - لا^۲}}$ کا مجموعہ اور تفاوت دریافت کرو

(۲۷) $\frac{لا + \sqrt{لا^۲ - ۱}}{لا - \sqrt{لا^۲ - ۱}}$ اور $\frac{لا - \sqrt{لا^۲ - ۱}}{لا + \sqrt{لا^۲ - ۱}}$ کے مجموعہ اور تفاوت کو دریافت کرو

(۲۸) $\frac{۱}{۱ + \sqrt{لا}}$ و $\frac{۱}{۱ - \sqrt{لا}}$ اور $\frac{۲}{۱ + لا}$ کا مجموعہ دریافت کرو

(۲۹) $\frac{۱}{۳ + \sqrt{۵}}$ اور $\frac{۳ - \sqrt{۵}}{۴}$ کے مجموعہ کو $\frac{۷ + \sqrt{۲۰}}{۳\sqrt{۲}}$ سے تفریق کرو

(۳۰) مقادیر اصم $\sqrt{۸ لا^۳ + ۲۴ لا^۲ ی + ۱۸ لا ی^۲}$ اور $\sqrt{۸ لا^۳ - ۲۴ لا^۲ ی + ۱۸ ی^۳}$ کو تحویل کرو اونکی سادہ صورت بناؤ اور اونکا حاصل ضرب بناؤ

معادلات یا مساوات

الجبرا کا اسلوب تحلیلی یہہ ہے کہ سوالات ریاضیہ کو بوساطت معادلات حل کریں جب کوئی ایک یا چند مقدار مجہول کا مقادیر معلومہ کے ساتھ موافق شرائط سوال کے رموز جبریہ مین بیان کیا جاتے تو اوسکو مساوات کہتے ہین

حل کرنا مساوات کا علم الجبرا کے اسلوب ترکیبی پر موقوف ہی اس اسلوب کے موافق اعمال ایسی کیے جاتے ہین جسے مقدار مجہول مقادیر معلومہ کی رقموں مین معلوم ہو جاتی ہے اب ہم مثال کی طور پر ایک سوال خلاصۃ الحساب سے نقل کرتے ہین جسے سوال کا اسلوب تحلیلی بوساطت مساوات کے خوب واضح ہوگا

مثال

ایک شخص زید اور عمر کا قرضدار تہا زید کا قرض ہزار دینار اور نصف عمر کے قرض کے برابر تہا اور عمر کا قرض ہزار دینار سے بقدر نصف قرض زید کے کم تہا تو بتاؤ زید اور عمر کا

قرض کیا گیا تھا

فرض کرو کہ زید کا قرض جو مقدار مجہول ہے اور جسکا دریافت کرنا منظور ہے حرف لا سے تعبیر ہوتا ہے تو عمر کا قرض ۱۰۰۰ − ½ لا ہوگا اور اسکا نصف ۵۰۰ − ¼ لا ہے اسواسطے زید کا قرض ۱۵۰۰ − ¼ لا ہے لیکن زید کا قرض لا ہی تھا اسلئے

$$\text{لا} = ۱۵۰۰ - \tfrac{1}{4}\,\text{لا}$$

اسکو مساوات کہتے ہیں کیونکہ اوسمیں ارتباط مقدار مجہول لا یعنی شے کا اعداد معلوم کے ساتھہ بیان ہوا ہے اب مساوات کے حل کرنیکے واسطے دو عمل کام میں لاتے ہیں ایک کسور کا دور کرنا دوسرا مقداروں کا منتقل کرنا یعنی جبر

کسر دور کرنیکے واسطے مساوات کی ہر ایک طرف کو ۴ میں ضرب دو تو

$$۴\,\text{لا} = ۶۰۰۰ - \text{لا}$$

اب − لا کو دائیں طرف منتقل کیا تو یہہ حاصل ہوا کہ

$$۵\,\text{لا} = ۶۰۰۰$$

ہر طرف کو ۵ پر تقسیم کیا تو

$$\text{لا} = ۱۲۰۰$$

اسسے معلوم ہوتا ہے کہ زید کو ۱۲۰۰ دینار اور عمر کو ۴۰۰ دینار دینے تھے

علامت برابری کی جو بیچ ہر یہہ جملوں کے درمیان لکھی جاتی تو اوسکی معنی ہمیشہ مساوات کے ٹھیک ٹھیک نہیں ہوتے کیونکہ اوسسے بہت سی صورتوں میں یہہ مفہوم ہوتا ہی کہ ایک ہی جملہ کو دو صورتوں میں لکھہ کر برابر لکھدیا ہے مثلاً

$$(\text{لا} + \text{ا})^2 = \text{لا}^2 + ۲\,\text{ا}\,\text{لا} + \text{ا}^2$$

$$\frac{\text{لا}^3 - \text{ا}^3}{\text{لا} - \text{ا}} = \text{لا}^2 + \text{ا}\,\text{لا} + \text{ا}^2$$

انکو مساوات کہنا درست نہیں کیونکہ برابری جو علامت = سے مفہوم ہوتی ہی اوسکو کچھہ متعلق لا کی قیمت سے نہیں ہے اور برخلاف اسکے ان مثالوں میں

$$\text{لا} + ۳ = ۷$$

$$\text{لا}^2 + ۶ = ۵\,\text{لا}$$

برابری ہو نہیں سکتی جب تک ایک خاص قیمت لا کی نہ لیجاے اول مساوات کی شرائط
کسی قیمت سے لا کی سواے ۲ کے پوری نہیں ہو سکتی اور دوسری مساوات کی شرائط لا = ۲
اور لا = ۳ سے ہوتی ہین اور سواے ان دو قیمتون کے کسی اور قیمت سے شرط پوری نہیں ہوتی
جب مساوات کی تحویل ارقام مفردہ کے سلسلہ کی طرف ہو جاتی ہی تو اونکی قسمین موافق
اونکے درجے کے ہوتی ہین

مساوات سادہ یا مساوات درجہ اول وہ مساوات ہی جسمین مقدار مجہول کی اعلی درجہ
کی قوت اول ہی ہو اوسکی عام صورت یہہ ہے کہ

لا + ع =

مساوات درجہ دوم وہ مساوات ہی جسمین مقدار مجہول کی اعلی درجہ کی قوت دو ہو اوسکی عام صورت یہہ ہے

لا^{۲} + ع لا + ق = ۰

مساوات مکعبی یعنی درجہ سوم کی وہ مساوات ہی جسمین مقدار مجہول کی اعلی درجہ کی قوت تین ہو
اوسکی عام صورت یہہ ہے

لا^{۳} + ع لا^{۲} + ق لا + ر = ۰

صورت عام ن درجہ کی مساوات کی یہہ ہے کہ

لا^{ن} + ع لا$^{ن-۱}$ + ق لا$^{ن-۲}$ + ر لا$^{ن-۳}$ + وغیرہا + رَ لا^{۲} + قَ لا + عَ = ۰

قیمتین لا کی جو شرائط مساوات کی پورا کرین اونکو مساوات کی جذرین کہتے ہین
جیسے کہ اس مساوات

۲ لا + ۳ = ۷

کی جذر ۲ ہے اور اس ۲ کو اکثر قیمت مساوات کی بھی کہتے ہین کیونکہ فقط یہی عدد ہے جو لا کی
جگہہ رکہا جانے سے مساوات کی شرائط کو پورا کرتا ہی اور موافق اسی دلیل کے مساوات

لا^{۲} + ۶ = ۵ لا

کی جذرین ۲ اور ۳ ہین
اب ہم آگے بتلائینگے کہ جتنے درجے کی مساوات ہوتی ہی اوتنی ہی اوسکی جذرین یعنی قیمتین ہوتی ہین

مساواتونکی تحویل

جبریہ مساواتوں کے حل کرنیکے واسطے ضرور ہے کہ اونکی تحویل ارقام مفردہ کے سلسلہ مین کرین اور اونکو موافق اعمال ذیل کے مرتب کرین

رقموں کا منتقل کرنا یعنی جبر کرنا

کسر کا دور کرنا

اصم کا دور کرنا

رقمون کا منتقل کرنا یعنی جبر

جب مساواتون مین نہ کوئی رقم مکسور ہو نہ کوئی مقدار اصم ہو تو وہ انتقال ارقام یعنی جبر سے حل ہوجاتی ہین

قاعدہ

(۱) اگر ضرورت ہو تو مساوات کی ہر یک طرف کو ارقام مفردہ کی سلسلہ مین تحویل کرو

(۲) اون رقمونکو ایک طرف لاؤ جنمین مقدار مجہول شامل ہو اور اون رقمون کو دوسری طرف لیجاؤ جنمین مقدار مجہول نہو اور لے آنے اور لے جانے مین اس بات پر خیال رکھو کہ علامت ہر رقم کی جو منتقل ہو بدل دو

(۳) اب امثال کو جمع کرکے مساوات کی ہر یک طرف کو مقدار مجہول کی امثال پر تقسیم کردو پس لا کی قیمت جو اسطرح معلوم ہوگی وہی مقدار مطلوب ہوگی

مثالین

(۱) مساوات ذیل مین ۳ کا داہنی طرف سے بائین طرف منتقل کرنا اور اوس مساوات کا حل کرنا منظور ہے

۲لا + ۳ = ۷

بموجب قاعدہ کے

۲لا = ۷ − ۳ = ۴

اسکے معنی یہہ ہین کہ ہر طرف سے ۳ کو تفریق کرو اگر ہم ہر یک طرف کو ۲ پر تقسیم کرین تو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

لا = ۲

یہہ حل مساوات کا ہے

(۲) مساوات ۵لا − ۳ا = ۲لا + ۴ا کو حل کرو

مساوات کے حل کرنیکے واسطے تمام رقمون کو جنمین لا شامل ہے ایک طرف لاتے ہین اور
اور ارقام کو دوسری طرف لیجاتے ہین پس

۵ لا − ۲ لا = ۴ ا + ۲ ا

۳ لا = ۶ ا

لا = ۲ ا

اس مساوات مین انتقال ارقام کے معنی یہہ ہین کہ ۲ لا کو طرفین سے تفریق کرین اور ۲ ا کو
طرفین پر زیادہ کرین اور جب امثال کو جمع کیا اور ہر طرف کو ۳ پر تقسیم کیا تو لا = ۲ ا
کے حاصل ہوا یہی حل مساوات کا ہے

(۳) مساوات ۲ (لا − ۳) − ۳ (لا − ۴) + ۵ لا = ۷ لا − ۵ (لا + ۱) − ۵

اس مساوات کے حل کرنیمین اول ہر ایک طرف مساوات کو ارقام مفردہ مین خطوط وحدانی
دور کرکے تحویل کرتی ہین اور پہر انتقال ارقام کرتی ہین جو رقمین ایسی ہین کہ اونمین لا موجود ہی اونکو
ایک طرف لاتے ہین اور باقی ارقام کو دوسری طرف لیجاتے ہین تو

۲ لا − ۶ − ۳ لا + ۱۲ + ۵ لا = ۷ لا − ۵ لا − ۵ − ۵

۲ لا − ۳ لا + ۵ لا − ۷ لا + ۵ لا = ۶ − ۱۲ − ۵ − ۵

۲ لا = − ۱۶

لا = − ۸

(۴) مساوات ۵ لا² + (لا − ۲) (لا + ۴) − ۳ (۲ لا + ۷) + ۱۰ = (۲ لا + ۱) (لا − ۳) + ۵ + ۴ لا²
کو حل کرو اب ۴ لا² اور ۵ کو جو دونو طرفون مین مشترک ہین ساقط کرو

لا² + (لا − ۲) (لا + ۴) − ۳ (۲ لا + ۷) + ۵ = (۲ لا + ۱) (لا − ۳)

چونکہ خطوط وحدانی سے ضرب تعبیر ہوتی ہے اوسکو عمل مین لاؤ اور ارقام متماثلہ کو جمع کرو تو یہہ حاصل ہوگا

۲ لا² − ۴ لا + ۱۸ = ۲ لا² − ۵ لا − ۳

۲ لا² طرفین مین مشترک ہی اوسے دور کرو اور رقمون کو منتقل کرو تو حل مساوات کا یہہ ہوگا کہ
لا = ۳

(۵) مساوات (۳ لا − ۱) (۲ لا + ۱) + ۶ لا² = (۲ لا + ۱) (۴ لا − ۳) + ۴ کو حل کرو
خطوط وحدانی سے جو ضرب تعبیر ہوتی ہے اوسکو عمل مین لاؤ تو

۴ لا² − ۱ + ۶ لا² = ۸ لا² − ۲ لا − ۳ + ۴

۱۰ لا² − ۱ = ۸ لا² − ۲ لا − ۱

۔ ۸لا کو طرفین سے ساقط کرو اور لا پر تقسیم کرو

۱۱لا = ۸لا − ۳

۳لا = −۳

لا = −۱

امثلہ مشق ۳۰

(۱) ۳لا + ۲ = ۲لا − ۶ (۲) ۲۷لا − ۱۴ = ۱۹۰ − ۴۱لا

(۳) ۵ − ۱۹لا = ۲ + ۱۱لا (۴) ۷لا + ۲ = ۱۱ + ۴لا

(۵) ۱۶لا − ۱۰ = ۴۱ − لا (۶) ۴۶۳ − ۱۰۰لا = ۹۱ − ۷لا

(۷) ۲۱لا + ۷ = ۴(لا − ۳) + ۳لا + ۶۱ (۸) لا(لا − ۳) + ۲(۱ − لا) = لا^2 − ۳لا − ۵

(۹) ۲(۳لا − ۱) − ۵(۲لا + ۱) = ۲۰ − ۷لا

(۱۰) ۸(۲ − لا) + ۷(۱ − ۲لا) = ۳۶ − ۲۸لا

(۱۱) ۳(لا − ۵) − ۵(لا − ۳) = ۲۱لا − ۴۶

(۱۲) ۹(۲لا − ۱) − ۷لا = ۸۹ − ۳(۴لا + ۲)

(۱۳) ۷(لا − ۱۰) + ۵۴لا = ۲(۱ − لا) − ۳(۵ − ۲لا)

(۱۴) ۲(۳لا − ۱) − ۱۷ = ۵(لا + ۲) − ۷(۳لا + ۱)

(۱۵) (لا − ۱)(لا + ۱) − ۵لا^2 + ۳لا = (۳ + ۲لا)(۵ − ۲لا) − ۲۰

(۱۶) (۱ − لا)(۱ + ۲لا) = (۳ + ۲لا)(۷ − ۳لا) − ۲۰ − ۲لا^2

(۱۷) ۲لا(۲لا + ۷) − ۴(لا + ۳) − ۱۱ = (۱ − لا)(۳ − ۴لا) + ۲لا + ۱۹

(۱۸) ۳۹ − (۷ − لا)(۷ + لا) − (۳لا + ۲)(۲لا − ۵) = لا

(۱۹) (لا + ۲)^2 + ۷(۳لا − ۱) = ۶(۲لا + ۴) + (لا − ۲)^2 + ۳

(۲۰) (۲لا − ۱)(۳لا − ۱) − ۲۳ = (۶لا + ۱)(لا − ۱) − ۳لا

(۲۱) ا لا = ب لا + ج

(۲۲) ا لا + ب = م لا + ن

(۲۳) ا(لا − ع) = ب(لا + ع)

(۲۴) (ا − لا)(ب − لا) = اب − لا^2

(۲۵) (لا + ۲ا)(لا + ۲ب) + (لا + م)(لا + ن)

= (لا + ۱) (لا + ب) + (لا + ۲م) (لا + ۲ن)

کسرون کا دور کرنا

اگر ایک ساوات مین کسر ہین تو اوسکی تحویل ایسی صورت مین ہوسکتی ہی کہ وہ انتقال ارقام سی موافق قاعدہ ذیل کے حل ہوجاے

قاعدہ

ساوات مین جتنی نسب نما واقع ہون اونکی ذو اضعاف اقل کو ساوات کی ہر ایکطرف مین ضرب دو پس ساوات کی صورت ایسی بنجائیگی کہ موافق قاعدہ سابق کی حل ہوجائیگی

مثالین

(۱) ساوات $\frac{لا}{۲} + \frac{۲لا}{۳} - \frac{لا}{۵} = \frac{۳}{۱۰} - \frac{۵لا}{۶}$ کو حل کرو

ضیق = ۳۰ ہر طرف کو ۳۰ مین ضرب دو تو

۱۵ لا + ۲۰ لا − ۶ لا = ۹ − ۲۵ لا

رقمون کے منتقل کرنے سے اور امثال کے جمع کرنے سے ہمکو یہہ جواب حاصل ہوتا ہی کہ لا = $\frac{۱}{۶}$

(۲) ساوات $\frac{لا − ۱}{۲} + \frac{۲لا + ۳}{۳} = \frac{۶لا + ۱۹}{۸}$ اسکو حل کرو

۲۴ مین ہر طرف مساوات کو ضرب دو تو

۱۲ (لا − ۱) + ۸ (۲لا + ۳) = ۳ (۶لا + ۱۹)

جواب لا = ۴ $\frac{۱}{۲}$

(۳) ساوات $\frac{۲}{۳لا} - \frac{۳}{۴لا} = \frac{۷}{۶لا}$ − ۵ کو حل کرو

۱۲ لا مین ضرب دو تو

۸ − ۹ = ۱۴ − ۶۰ لا

اسواسطے ۶۰ لا = ۱۵ جواب لا = $\frac{۱}{۴}$

(۴) ساوات $\frac{۲لا + ۱}{۳لا − ۱} = \frac{۴لا + ۷}{۶لا + ۳}$ کو حل کرو

نسب نماؤن کا حاصلضرب ذو اضعاف اقل ہے اسواسطے

(۲لا + ۱) (۶لا + ۴) = (۴لا + ۷) (۳لا − ۱)

جواب لا = ۲

امثلہ مشق ۱۳

(۱) $\frac{لا}{۲} - \frac{لا}{۳} = \frac{لا}{۵} + ۱$

(۲) $\frac{لا}{۵} + \frac{۳لا}{۷} = \frac{لا}{۳} + ۵۲$

(۳) $\frac{لا}{۳} + \frac{۲لا}{۵} = ۳ - \frac{لا}{۶}$

(۴) $\frac{۶لا}{۷} - \frac{۵لا}{۴} = ۳۱ - \frac{۳لا}{۲}$

(۵) $\frac{۷\text{لا}}{۲} - \frac{۲\text{لا}}{۳} - \frac{\text{لا}}{۴} = \frac{۵\text{لا}}{۶} + \frac{۳\text{لا}}{۵} + ۲۳$

(۶) $\frac{۵}{\text{لا}} - \frac{۳}{۲\text{لا}} + \frac{۱}{۳\text{لا}} = \frac{۷}{۶\text{لا}} + ۸$

(۷) $\frac{۲}{\text{لا}+۳} + \frac{۳}{۲\text{لا}-۱} = \frac{۱۴}{۶\text{لا}-۳}$

(۸) $\frac{۱}{\text{لا}-۵} + \frac{۲}{۳\text{لا}+۲} = \frac{۴۲}{۱۵\text{لا}+۱۰}$

(۹) $\frac{۱}{\text{لا}+۱} + \frac{۱}{\text{لا}+۳} = \frac{۱۲}{۶\text{لا}+۱۱}$

(۱۰) $\frac{۱}{\text{لا}-۱} + \frac{۲}{\text{لا}+۱} = \frac{۳}{\text{لا}-۵}$

(۱۱) $\frac{۲}{\text{لا}-۳} - \frac{۴}{۴\text{لا}-۳} = \frac{۴}{۱-\text{لا}}$

(۱۲) $\frac{۵}{\text{لا}+۱} + \frac{۱}{۲\text{لا}+۳} = \frac{۱۶}{۱۲\text{لا}+۳}$

(۱۳) $\frac{۳\text{لا}-۲}{۳\text{لا}+۴} = \frac{۶\text{لا}+۵}{۹\text{لا}-۱۰}$

(۱۴) $\frac{\text{لا}-۴}{۲\text{لا}+۷} = \frac{۸-\text{لا}}{\text{لا}-۱۴}$

(۱۵) $\frac{۳}{\text{لا}-۱} + \frac{۲}{\text{لا}+۴} = \frac{۷}{۲\text{لا}-۲} + \frac{۲}{۳\text{لا}+۱۲}$

(۱۶) $\frac{۱}{۲\text{لا}-۱} + \frac{۱}{۴\text{لا}+۱} = \frac{۵}{\text{لا}-\frac{۱}{۲}} + \frac{۶}{\text{لا}+\frac{۱}{۴}}$

(۱۷) $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{لا}}{\text{ب}} = \text{ج}$

(۱۸) $\frac{\text{لا}+۱}{\text{ا}} + \frac{\text{لا}+۱}{\text{ب}} = \frac{۱-\text{لا}}{\text{ج}}$

(۱۹) $\frac{\text{لا}}{\text{ا}-\text{ب}} + \frac{\text{لا}}{\text{ا}+\text{ب}} = ۱$

(۲۰) $\frac{۱}{\text{لا}-\text{ا}} + \frac{۱}{\text{لا}+\text{ا}} = \frac{۲}{\text{لا}-\text{ع}^{۲}}$

(۲۱) $\left(\frac{\text{لا}+۱}{۲\text{لا}+۱}\right)^{۲} = \frac{\text{لا}+\text{ا}}{۴\text{لا}+\text{ا}}$

(۲۲) $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}+\text{ا}} = \frac{۱+\text{ب}}{\text{لا}+\text{ب}}$

(۲۳) $\frac{\text{لا}^{۳} + \text{ا}\,\text{لا}^{۲} - \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}}{\text{لا}^{۳} - \text{ا}\,\text{لا}^{۲} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}} = \frac{\text{لا}^{۲} + \text{ا}\,\text{لا} - \text{ب}}{\text{لا}^{۲} - \text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}}$

(۲۴) $\frac{\text{ا}\,\text{لا}+۱}{\text{ا}\,\text{لا}-۱} = \frac{\text{ع}^{۲}+\text{ا}\,\text{لا}}{\text{ع}^{۲}-\text{ا}\,\text{لا}}$

(۲۵) $\frac{۱}{۱+\text{ا}\,\text{لا}} - \frac{۱}{۱-\text{ب}\,\text{لا}} = \frac{\text{ا}+\text{ب}}{\text{اب}\,\text{لا}+۱}$

مقادیر اصم کا دور کرنا

اگر مساوات میں ایک مقدار اصم ہو تو موافق قاعدہ ذیل کے علامت جذر کی دور ہو سکتی ہے

(۲) مقدار اصم کی قوت نما کا جو نسب نما ہو اوسکے موافق طرفین مساوات کا صعود لو
پس مساوات جو حاصل ہوگی وہ علامت جذر سے خالی ہوگی

مثالین

(۱) مساوات $۲لا - \sqrt{۴لا^۲ + ۶لا - ۱۰} + ۴ = ۰$ کو حل کرو

عمل انتقال سے $\sqrt{۴لا^۲ + ۶لا - ۱۰} = ۲لا + ۴$

طرفین کا مربع کرو تو

$$۴لا^۲ + ۶لا - ۱۰ = ۴لا^۲ + ۱۶لا + ۱۶$$

جواب $لا = -۲٫۶$

اگر مساوات مین دو درجہ دوم کے مقادیر اصم یا دو درجہ سوم کی مقادیر اصم ہون تو اوسکا یہہ قاعدہ ہے

قاعدہ

(۱) ایک مقدار اصم کو ایک طرف لاؤ اور باقی ارقام کو دوسری طرف مساوات کے لیجاؤ
(۲) جو مقدار اصم کا قوت نما ہو اوسکے نسب نما کے موافق طرفین مساوات کا صعود لو
پس جو مساوات حاصل ہوگی اوسمین ایک مقدار اصم ہوگی اور وہ موافق قاعدہ بالا کے دور ہو سکتی ہے

مثال

مساوات $\sqrt{۲لا - ۱} + \sqrt{۲لا + ۴} = ۵$ کو حل کرو

عمل انتقال سے $\sqrt{۲لا - ۱} = ۵ - \sqrt{۲لا + ۴}$

طرفین کا مجذور کرو تو $۲لا - ۱ = ۲۵ - ۱۰\sqrt{۲لا + ۴} + ۲لا + ۴$

اور انتقال اور تقسیم سے

$$\sqrt{۲لا + ۴} = ۳$$

$۲لا + ۴ = ۹$ جواب $لا = ۲\frac{۱}{۲}$

قاعدہ دوم

(۱) دونو مقادیر اصم کو ایک طرف لاؤ اور باقی ارقام کو دوسری طرف لیجاؤ
(۲) جو مقادیر اصم کے قوت نما کا نسب نما ہو اوسکے موافق طرفین مساوات کا صعود لو
مساوات مستحصلہ مین ایک مقدار اصم ہوگی

مثالین

(۱) مساوات √(۲لا − ۱) + √(۲لا + ۴) = ۵ کو حل کرو

مجذور کرنے سے ۲لا − ۱ + ۲√((۴لا² + ۶لا − ۴)) + ۲لا + ۴ = ۲۵

اور انتقال اور تقسیم سے

√(۴لا² + ۶لا − ۴) = ۱۱ − ۲لا

مجذور کرنے سے ۴لا² + ۶لا − ۴ = ۱۲۱ − ۴۴لا + ۴لا²

۵۰لا = ۱۲۵

جواب لا = ۲٫۵

(۲) مساوات ∛(۱ + لا√۵) + ∛(۱ − لا√۵) = ∛۵ کو حل کرو

بموجب مقدمہ چہارم صفحہ [illegible] کے کعب کرنے سے

۲ + ۳∛۵ × ∛(۱ − ۵لا²) = ۵

انتقال اور تقسیم سے ∛۵ × ∛(۱ − ۵لا²) = ۱

مکعب طرفین کا کرو تو جواب لا = ۲/۵

اگر مساوات میں تین درجہ دوم یا بین درجہ سوم کی مقادیر اصم ہوں تو یہہ قاعدہ کام میں لاؤ

قاعدہ

(۱) دو مقادیر اصم کو ایک طرف لاؤ اور باقی ارقام کو دوسری طرف لیجاؤ

(۲) اصم کے قوت نما کے نسب نما کے موافق طرفین مساوات کا صعود لو

تو مساوات مستحصلہ میں ایک مقدار اصم ہوگی

مثالین

(۱) مساوات √(لا + ۴) + √(۲لا + ۹) = √(۳لا + ۲۵) کو حل کرو

طرفین کا مجذور لو تو

لا + ۴ + ۲√(۲لا² + ۱۷لا + ۳۶) + ۲لا + ۹ = ۳لا + ۲۵

عمل انتقال اور تقسیم سے

√(۲لا² + ۱۷لا + ۳۶) = ۶ جواب لا = −۸½

(۲) اس مساوات میں سے اصم کو دور کرو

$$\sqrt[3]{\text{ا}} + \sqrt[3]{\text{ب}} + \sqrt[3]{\text{س}} = ۰$$

عمل انتقال سے $\sqrt[3]{\text{ا}} + \sqrt[3]{\text{ب}} = -\sqrt[3]{\text{س}}$

مکعب طرفین مساوات کا لو تو (موافق مقدمہ ۴ صفحہ ۲۵)

$$\text{ا} + \text{ب} - ۳\sqrt[3]{\text{اب س}} = -\text{س}$$

اور بموجب عمل انتقال کے $۳\sqrt[3]{\text{اب س}} = \text{ا} + \text{ب} + \text{س}$

جواب $(\text{ا} + \text{ب} + \text{س})^{۳} = ۲۷\,\text{اب س}$

امثلہ مشق ۳۲

(۱) $\sqrt{\text{لا}^{۲} - ۵\text{لا} + ۳} - \text{لا} = ۲$

(۲) $\sqrt{۴\text{لا}^{۲} + ۳\text{لا} - ۱۶} = ۲\text{لا} + ۲$

(۳) $۳\text{لا} + \sqrt{۴ - ۸\text{لا} + ۹\text{لا}^{۲}} = ۴$

(۴) $\sqrt{۲(۱ - \text{لا})(۳ - ۲\text{لا})} - ۱ = ۲\text{لا}$

(۵) $۳ + \sqrt{۲\text{لا}^{۲} + ۴\text{لا} + ۹} = ۴\text{لا}$

(۶) $\sqrt{(\text{لا} + ۱۲)^{۲} + ۲۵} + ۱۳ = ۲\text{لا}$

(۷) $۱ + \sqrt{(۳ - ۵\text{لا})^{۲} + ۱۶} = ۲(۳ - \text{لا})$

(۸) $\sqrt{۲\text{لا} + ۳} - \sqrt{۲\text{لا} - ۳} = ۲$

(۹) $\sqrt{۷ - ۵\text{لا}} + \sqrt{۴ - ۵\text{لا}} = ۳$

(۱۰) $۲\text{لا} + \sqrt{۴\text{لا}^{۲} + \sqrt{۱ - ۴\text{لا}}} = ۱$

(۱۱) $\sqrt{۹\text{لا}^{۲} - ۴\sqrt{۱ + ۲۷\text{لا}}} = ۲ + ۳\text{لا}$

(۱۲) $\text{لا} = ۰٫۶ - \sqrt{\text{لا}^{۲} - ۰٫۱۲\sqrt{۹ - ۱۱\text{لا}}}$

(۱۳) $\frac{۵}{\sqrt{۳\text{لا} + ۲}} = \sqrt{۳\text{لا} + ۲} + \sqrt{۳\text{لا} - ۱}$

(۱۴) $\sqrt{۴\text{لا} + ۱} = \frac{۱}{\sqrt{۴\text{لا} + ۱}} - \frac{۱}{۳}\sqrt{۳۶\text{لا} - ۷}$

(۱۵) $\sqrt{\text{لا} + ۲} + ۳\sqrt{\text{لا} + \frac{۱}{۳}} = ۲\sqrt{\text{لا} + ۱\frac{۱}{۲}}$

(۱۶) $\sqrt{۹\text{لا} - ۵} + \sqrt{۴۹\text{لا} + ۸} = \sqrt{۱۰۰\text{لا} + ۳}$

لا + ۷ = لا + ۲ + $\frac{لا + ۷}{۱۴}$

مساوات کے حل کرنے سے لا = ۶۳ کے حاصل ہوتا ہی اسیواسطے

جواب ا کا ارتفاع = ۵ فٹ ۸ انچ

ب کا ارتفاع = ۵ فٹ ۳ انچ

(۲) ایک عدد ایسا دریافت کرو کہ اگر اوسپر ۱۲ زیادہ کرین اور اوسمین سے ۱۲ تفریق کرین تو حاصل جمع اور حاصل تفریق کے حاصلضرب کا جذر برابر اوسس فرق کے ہو جو اوس عدد مین سے ۴ کے گہٹانے سے حاصل ہوتا ہی

فرض کرو کہ لا عدد مطلوب ہے توبموجب شرائط سوال

$\sqrt{(لا + ۱۲)(لا - ۱۲)}$ = لا - ۴

مساوات کے حل کرنے سے یہہ جواب حاصل ہوتا ہے کہ لا = ۲۰

(۳) ا کو کام دیا جاے اور وہ اوسکو ۱۲۰ دن مین پورا بنا نے اور اوسی کام کو ب ۸۰ دن مین تیار کرے تو بتاؤ دونو ا اور ب اوس کام کو ملکر کتنے دنون مین بنائینگے

فرض کرو کہ کل کام ک سے تعبیر ہوتا ہی اور لا ایام مطلوب کی تعداد ہی تو

ا کا کام ایک دن = $\frac{ک}{۱۲۰}$

ب کا " = $\frac{ک}{۸۰}$

اور ا اور ب کا اکٹھا کام = $\frac{ک}{لا}$

اسیواسطے $\frac{ک}{لا}$ = $\frac{ک}{۱۲۰}$ + $\frac{ک}{۸۰}$

ک پر تقسیم کرنے سے $\frac{۱}{لا}$ = $\frac{۱}{۱۲۰}$ + $\frac{۱}{۸۰}$ اسلئے

جواب لا = ۴۸

(۱) ایک ظرف ایک دہانہ سے نصف گہنٹہ مین اور دوسرے دہانہ سی ایک گہنٹہ اور دس منٹ مین اور تیسرے دہانہ سے دو گہنٹہ مین پر ہوتا ہی اب اگر یہہ تینون دہانے کہول دئے جاوین تو کتنی دیر مین وہ ظرف پر ہوگا

فرض کرو کہ ب بوتل پانی اس ظرف مین سماتا ہی اور وقت مطلوب کی تعداد منٹون کی لا ہے

اول دہانہ سے $\frac{ب}{۳۰}$ بوتل فی منٹ پانی آتا ہے

دوسرے " $\frac{ب}{۷۰}$

تیسرے دہانہ سے ب/۱۲۰ بوتل فی منٹ پانی آتا ہے

تینوں سے ملکر ب/لد "

اسواسطے ب/لد = ب/۳۰ + ب/۷۰ + ب/۱۲۰

جواب لد = ۱۷ ۴۱/۴۷ منٹ

(۵) ایک قطعہ زمین کا مستطیل ہے ایک ضلع اوسکا دوسرے ضلع سے طول میں ۱۴ گز زیادہ ہے اگر چھوٹا ضلع ۲۰ گز بڑہ جائے اور بڑا ضلع ۷ گز گھٹ جائے تو رقبہ کچھہ نہیں بدلتا تو اضلاع کا طول کیا ہے

فرض کرو کہ چھوٹا ضلع لد ہے تو لد + ۱۴ بڑا ضلع ہوگا اور بموجب شرائط سوال کے اضلاع لد + ۲۰ اور لد − ۳ ہوجائینگے اسلئے بموجب شرط سوال کے

(لد + ۲۰) (لد − ۳) = لد (لد + ۱۴)

جواب چھوٹا ضلع = ۳۰ گز

بڑا ضلع = ۴۴ گز

(۶) ایک عدد دو ہندسوں کا ہے اونمیں سے اول ہندسہ بڑا بہ نسبت دوسرے ہندسہ کے بقدر ایک کے اور مجموعہ ہندسوں کا ایک چھٹا حصہ خود عدد کا ہے اس عدد کو تبلاؤ

فرض کرو کہ دوسرا ہندسہ لد ہے تو پہلا ہندسہ لد + ۱ ہوگا اب بموجب طریقہ کتابت نظم عشری اعداد کے عدد برابر ۱۰ (لد + ۱) + لد کے ہے اسواسطے

(۱۱ لد + ۱۰)/۶ = ۲ لد + ۱

جواب = ۵۴

(۷) ا اور ب شریک تجارت ہوئی ا نے ۱۵ سو روپیہ بہ نسبت ب کے زیادہ دئے جب تجارت کا کام ختم ہوا تو ا کو ۹۰۰ روپیہ نفع کی اور ب کو ۶۵۰ روپیہ فایدہ کے حاصل ہوئے تو بتاؤ ہر شریک نے کتنا روپیہ تجارت مین لگایا تہا

فرض کرو کہ ب کے سرمایہ کی تعداد لد روپیہ ہے تو ا کے سرمایہ کی تعداد لد روپیہ + ۱۵۰۰ روپیہ ہوگا اب انجام شراکت مین ب کو لد روپیہ + ۶۵۰ روپیہ اور ا کو لد روپیہ + ۱۰۵۰۰ روپیہ ملا اور چونکہ اونکے حصوں میں نسبت موافق اونکے سرمایہ کے ہوگی اسلئے

لد : لد + ۱۵۰۰ :: لد + ۶۵۰ : لد + ۱۰۵۰۰

اب اطراف کے حاصل ضرب کو اوساط کے حاصل ضرب کی برابر لکھا تو

لا۲ + ۰۰۰ ۱۰۵۰ لا = لا۲ + ۰۰۰ ۸۰ لا + ۰۰۰ ۹۷۵۰۰

اس مساوات کو حل کرین تو یہہ جواب حاصل ہوگا

ا کا سرمایہ ۵۴۰۰ روپیہ
ب کا سرمایہ ۳۹۰۰ روپیہ

(۸) ایک دہات تانبے اور ٹین سے اسطرح مرکب ہوا ہے کہ تانبا فیصدی ۷۰ اور ٹین فیصدی ۳۰ ہے تو دو من ۲۴ سیر دہات مین اور کتنا تانبا ملائین اور گلائین کہ ۸۴ فیصدی تانبا اوسمین ہوجاے

فرض کرو کہ لا سیر تانبے کا وزن ہو تو اس سبب سے کہ ۱۱۲ سیر کا ۷۰ فیصدی ۷۸٫۴ ہی اسلئے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

اسواسطے
۷۸٫۴ + لا : ۱۱۲ + لا :: ۸۴ : ۱۰۰
۷۸۴۰ + ۱۰۰ لا = ۹۴۰۸ + ۸۴ لا
۱۶ لا = ۱۵۶۸

جواب وزن تانبے کا = ۹۸ سیر

سوالات نمبری ۳۳

(۱) مجموعہ دو عددون کا ۳۴ ہی اور اونکا فرق ۶ ہی اون اعداد کو دریافت کرو

(۲) فرق دو عددون کا ۳ ہی اور اونکا حاصل ضرب چھوٹے عدد کے مربع سے بقدر ۲۱ کے زیادہ ہی اون عددون کو دریافت کرو

(۳) ایک عدد دوسرے عدد سے بقدر ۶ کے بڑا ہی اور اونکے مربعون کا تفاوت دس گنا چھوٹے عدد کا ہی اون عددون کو دریافت کرو

(۴) ایک قطعہ زمین کا مربع ہی اگر ایک ضلع ۳ فیٹ بڑہایا جای اور دوسرا ضلع ۲٫۴ فیٹ گھٹایا جای تو رقبہ بدستور رہیگا اوسمین کچھہ فرق نہین آئیگا اس قطعہ زمین کا ایک ضلع دریافت کرو

(۵) ایسا عدد دریافت کرو کہ اوسپر اوسکی تہائی زیادہ ہو تو وہ اپنی نصف سی بقدر ۵ کے زیادہ ہوجاے

(٦) ایک تہیلی مین چاندی کے سکے تہی اونمین کچہہ سکسپنس اور شلنگ اور فلورن اور ہاف کرون تہی ہر ایک شلنگ کے پیچہے تین سکسپنس تہی اور فلورن اور ہاف کرون کی تعداد آپسمین برابر تہین اور دونونکی تعداد ملکر سہ چند شلنگون کی تعداد سی تو بتاؤ ہر قسم کی سکے کتنے کتنے تہے اگر سب سکے ١ پونڈ ١٧ شلنگ تہی

(٧) ایک بلم کا ایک چہٹا حصہ زمین مین گڑا ہوا ہے اور اوسپر پہریرا ١٢ فیٹ کا لگا ہوا ہی اور باقی بلم تین چوتہائی کل اپنی لنبائی کا ہی تو بتاؤ بلم کی پہریری سمیت کیا لنبائی ہے

(٨) جن دو متصل کے عددون کے مربعون کا تفاوت ٣٥ ہی اونکو بتلاؤ

(٩) ا اور ب کہیلنے بیٹہی ا پاس سات روپیہ بہ نسبت ب کے زیادہ تہی لیکن جب دس روپیہ ہار گیا تو اوسکو معلوم ہوا کہ ب کے روپیہ سے اوس پاس آدہی روپیہ ہوگئی تو بتاؤ ا اور ب پاس کتنا کتنا روپیہ تہا

(١٠) باپ بیٹے دونو ملکر ایک کام ٦ دن مین بناتے ہین اور باپ اکیلا اوس کام کو دس دنمین بناتا ہے پس اگر باپ کو مزدوری ٣ آنہ ٦ پائی ملی تو اوسکے بیٹے کو کیا مزدوری ملنی چاہیے

(١١) ایک لڑکا اپنی گولیون کا پانچوان حصہ ایک بازی مین ہار گیا اور جو کچہہ گولیان باقی رہین تہین اونکا ایک چہٹا حصہ دوسرے بازی مین ہار گیا اب اوس پاس ٦٠ گولیان تہین تو بتاؤ اصل مین اوس پاس کتنی گولیان تہین

(١٢) نصف پیپہ شراب کا ایک شخص پی گیا اتفاق سی ڈاٹ پیپے کی کہلی رہی اسلیے ٦ گیلن شراب بہہ گئی اور باقی کی تین چوتہائی کام مین آئی اور باقی دو گیلن شراب بگڑ گئی وہ پہینک دیگئی تو بتاؤ پیپہ مین کتنی شراب تہی

(١٣) ایک منفذ سی پانی برابر یکسان نکلتا ہی اور اوسی ایک حوض ١٠ دن مین پر ہوتا ہی اور ایک اور چہوٹا منفذ ہی اوسی وہ حوض ١٥ دن مین معمور ہوتا ہی تو بتاؤ یہہ دونو منفذ کتنی دنونمین حوض کو بہر دینگے

(١٤) ایک ٹوکرہ مین سیب اور ناشپاتیان بارہ درجن ہین اگر سیب دوگنی اور ناشپاتیان آدہی ہوتین تو کل کی تعداد ایک درجن زیادہ ہوجاتی تو بتاؤ کتنے سیب اور کتنی ناشپاتیان اوس ٹوکرہ مین تہین

(١٥) اگر ب اپنا روپیہ آدہا ا کو دیدے تو ب پاس چوتہائی روپیہ ا سے ہوجاے اور اگر ا پچاس روپیہ ب کو دی تو ب پاس آدہی روپیہ ا سے ہوجائین تو بتاؤ ہر ایک پاس کتنا روپیہ ہے

(۱۶) ا اور ب آپسمین ایک دوسرے سے ملنے کیلئے چلے ا فی گھنٹہ ۵ ½ میل اور ب فی گھنٹہ ۳ ½ میل چلتا ہی اور وہ بیچ کے مقام سی ۳ میل پرے ملے تو جن مقامات سے وہ چلے اونکی درمیان کا فاصلہ بتاؤ

(۱۷) ۱۵ شلنگ گیلن کی شراب ایک پونڈ گیلن کے ۲۰ گیلن شراب مین کتنی ملائی جای کہ ۱۷ شلنگ کی شراب بنجاے

(۱۸) ا بوتلین شراب کی م روپیہ بوتل کی اور ب بوتلین شراب کی ن روپیہ بوتل کی اور ج بوتلین شراب کے ع روپیہ بوتل کی اور علی ہذا القیاس خرید کر ملائین تو اس مرکب شراب کی فی بوتل قیمت بتلاؤ

(۱۹) ایک بہلا مانس اپنی آدہی دولت اپنے بیٹے کو دیگیا اور جو کچھہ باقی رہا اوسکے تین ساتوین حصے دو بیٹون مین سے ہر ایک بیٹے کو دئی اور ۲۰۰ روپیہ جو کل دولت مین سے باقی رہی وہ خیرات دیدیے تو بتاؤ اوسکے پاس کتنی دولت تہی

(۲۰) ایک مقام سی علم ۴۰۵ گز کے فاصلہ پر گڑا ہوا تہا ا اور ب نے اس مقام سی اوس علم تک آنے جانی کی دوڑ کی ا پہرتی دفعہ ب سے ۳۴ گز کے فاصلہ پر علم سے ملا اور چلنے کے مقام پر نصف منٹ ب سے پہلے پہونچا تو بتاؤ کتنی دیر مین اوسنے کل فاصلہ طے کیا

(۲۱) ۶ روپیہ ۷ ۴ پائی گز ایک گزی کے تین تہان ۱۹ گز خریدے اور ۱۰ روپیہ ۲ پائی کو اوسی گزی کے ۵ تہان اور ۳۱ گز مول لئے تو بتاؤ ہر تہان مین کتنے گز کپڑا تہا

(۲۲) ب اگرچہ ۵ میل آگے ا سے تہا لیکن ۳ میل فی گھنٹہ چلتا اور ا کی چال ۴ ½ میل تہی تو بتاؤ ا کتنی مسافت طے کرکے ب سے ملیگا اور کہان ملیگا

(۲۳) آخر سوال مین فرض کرو کہ ا فی گھنٹہ م میل چلتا ہی اور ب فی گھنٹہ ن میل چلتا ہی اور د میل ا سے آگے ب تہا تو بتاؤ ا کتنی مسافت طے کرکے ا سے ملیگا اور کہان ملیگا

(۲۴) ایک عدد مین دو ہندسے ہین اول ہندسہ دوسرے ہندسے کے بقدر ۲ کے کم ہی اگر ہندسون کے مربعون کا فرق خود عدد مین تفریق کیا جای تو باقی ۹ رہتی ہین اوس عدد کو نبلاؤ

(۲۵) ایک مزدور ۴۸ دن کیلئے کام پر لگایا گیا اور اوس سے یہہ شرط ٹہری کہ جس روز کام کریگا

۲ر پائیگا اور جس روز کام نہ کریگا تو ۴ پائی جرمانہ لیا جائیگا ان ایام کی کل مزدوری اوسکو ۵ روپیہ ۴ر ملے
تو بتاؤ کتنے دنون اوسنے کام کیا

(۲۶) ایک ایسا عدد دریافت کرو کہ اگر اوسکی نصف اور تہائی جو تہائی ۵۴ پر زیادہ کرین تو ۴۴۴ حاصل ہون

(۲۷) ایک سکہ ۱۰۰ پونڈ کا تہا اوسکی عوض مین ۲۰۳ سکے دیئے گئے ان سکون مین کرون اور پاؤ گنی تہی
تو بتاؤ ہر ایک قسم کے کتنے سکے تہے

(۲۸) بتاؤ ۱۲ گہنٹہ مین کس وقت گہنٹہ اور منٹ کی سوئیان جنسے پر منطبق ہوتی ہین

(۲۹) خرگوش کے پیچہے کتا پڑا خرگوش ۶۰ ذ قندآگے تہا جتنی دیر مین وہ ۹ ذ قندین لگاتا
اوتنی دیر مین کتا ۶ ذ قند مارتا تہا مگر کتے کی ۳ ذ قندین برابر خرگوش ۷ ذ قندون کے تہین
تو بتاؤ کتا کتنی ذ قندون مین خرگوش کو پکڑ لیگا

(۳۰) دخانی کشتی ۱ میل فی گہنٹہ ٹہری ہوئی پانیمین چل سکتی ہی وہ ایک مقام سی دوسرے
مقام پر ۲ گہنٹہ مین دہار کے زور سے جاتی اور ۳ گہنٹہ مین الٹی آتی ہے تو بتاؤ فی گہنٹہ دہار
کی کیا رفتار ہے

(۳۱) دریا مین دو مقامون کے درمیان فاصلہ ۱۹ میل ہی دہار پر جانے مین ۱ گہنٹہ ۱۸ منٹ لگتی ہین اور
الٹی دہار پر آنے مین دو گہنٹہ ۱۰ منٹ تو بتاؤ دہار کی رفتار کیا ہی اور ٹہرے ہوئے پانیمین کتنی چلیگی

(۳۲) ایک شخص نے اپنا آدہا روپیہ ۳ روپیہ سیکڑہ پر ایک تہائی ۳ روپیہ سیکڑہ پر اور
باقی چار روپیہ سیکڑہ پر سود دیدیا اور اوسکی آمد فی ۴۸۴ روپیہ ۴ آنہ ہی تو بتاؤ اوس
پاس کتنا روپیہ ہے

(۳۳) بگی اور گہوڑون کی جوڑی کی قیمت ۵۷۳ روپیہ ہین اور ایک گہوڑے کی قیمت دوسرے
گہوڑے سے بقدر ۱۰ روپیہ کے زیادہ ہی اور بگی کی قیمت جوڑی کی قیمت سی ڈیوڑہی ہے
تو بتاؤ ہر ایک گہوڑی اور بگی کی قیمت کیا ہی

(۳۴) ا اور ب شریک تجارت ہین اور اوسمین ا نے بہ نسبت ب کے ۵۰۰ روپیہ زیادہ دئے ہین

اور ۴۰۰۰ روپیہ کے نفع مین سے اُ کا حصہ ۱۶۰۰ روپیہ ہے تو بتاؤ اُسنے کتنا روپیہ تجارت مین

(۳۵) ایک گہڑی جتنی تیزی ہو اتنا ہی گہنٹا سست ہے اور گہنٹے کے ۹۸ ۱۷ ساعت برابر گہڑی کے ۱۸۰۲ ساعت مین گہنٹہ اور گہڑی کی چال بتاؤ

(۳۶) کچہہ سورن اور شلنگ اور سکس پنس ملکر ۸۰ پونڈ ۴ شلنگ ۶ پنس کی برابر ہین اور شلنگ اتنے کہ وہ سورن سے بقدر ایک گنی کے کم ہین اور بقدر ڈیڑہ گنی کے سکس پنس سے زیادہ ہین ہر سکہ کی قیمت دریافت کرو

(۳۷) الف اسٹیشن پر مسافر گاڑی پہونچی اور ۷ منٹ ٹہری اب اوسکو چلی ہوئی دو منٹ ہوئی تہی کہ وہ ڈاک گاڑی سی ملی یہہ ڈاک گاڑی ب اسٹیشن سے اوسوقت چہوٹی تہی کہ پہلے گاڑی الف کے دوسری طرف ۲۸ میل پر تہی اور اس گاڑی کی رفتار پہلی گاڑی کی رفتار سی دو چند ہی اور ب اور الف اسٹیشن کے درمیان وہ ڈیڑ گہنٹہ مین چلتی ہی تو مسافر گاڑی کی چال بتلاؤ کہ کیا

(۳۸) الف سے ب کی طرف ایک مسافر ۴ میل فی گہنٹہ کی رفتار سے چلا اور ایک گہنٹے کے بعد دوسرا مسافر ب سے الف کی طرف ۳ ½ میل کی رفتار سے چلا اور جب وہ آپسمین ملے تو اول ۴ میل زیادہ بہ نسبت دوسرے کے چلا تہا تو بتاؤ کیا وقت اس سفر مین لگا اور کتنے فاصلے طے ہوئی

(۳۹) ایک دخانی جہاز ۶۸ ۲۵ میل ۹ دن مین چلا تہی دن تک ہوا اور دہار کے زور سے ۳ میل فی گہنٹہ کی رفتار سے وہ الٹا چلا اور چار روز تک اوسکو ۲ میل فی گہنٹہ رفتار کے امداد ہوا اور دہارہ کی سبب سی پہونچی اور باقی اوقات مین وہ فقط دخان کے زور سی چلا تو بتاؤ اوسکی رفتار ٹہری ہوئی پانی مین کیا ہی

(۴۰) ایک عدد دو ہندسون کا ہی پہلا ہندسہ دوسرے ہندسے سے بقدر ۴ کے بڑا ہی اور جب اوسکے اعداد ترتیب مین معکوس ہوجائین تو ایک عدد حاصل ہوتا ہی جو پہلے عدد کا چار ساتوان حصہ ہے بتلاؤ وہ عدد کیا ہی

(۴۱) ۲ اور ۳ بجے کے درمیان وقت ہی اور منٹ کی سوئی گہنٹہ کی سوئی سی ۱۴ ½ منٹ جیسی پر بڑہی ہوئی ہے تو بتاؤ کیا بجا ہے

(۴۲) ہیٹہہ مین ایک بڑہیا دو روز تک جتنی انڈی ایکدن انڈی لائی اوتنی ہی دوسرے دن لائی
اول دن تو ۲ درجن انڈی کسی اتفاق سی رستہ مین ٹوٹ پہوٹ گئی اور باقی انڈے اوسنے
۳ پیسے کے چار چار بیچے اور دوسرے دن کوئی چور ۲ ½ درجن انڈے اوس غریب بڑہیا کے
چراکر لیگیا اوسدن اوسنے ۹ پیسے کے آٹھہ آٹھہ انڈے بیچے اور اوسکو پہلے دن سے ۱۲ پیسون
کا نفع زیادہ ہوا تو بتاؤ کتنے انڈے وہ ہر روز ہیٹہہ مین لائی

(۴۳) ایک پہیہ ۲۶ چکرون مین اتنی مسافت طے کرتا ہے کہ وہ ۱۹۶ ½ گنی پہیہ کے قطر سے
بقدر ۹ فیٹ کی زیادہ ہوتی ہے تو بتاؤ پہیہ کا قطر کیا ہی اور (محیط : قطر :: ۲۲ : ۷)

(۴۴) ایک آدمی ۵۸۰۰ روپیہ چہوڑ مرا اور تقسیم وراثت کی خاندان مین وصیت کرگیا
اوسکے خاندان مین ۳ بیٹے اور ۴ بیٹیان اور بیوہ بیوی تہی بیوی کا دوگنا حصہ ایک پسر اور ایک
دختر کے حصون کے برابر تہا اور دو بیٹون کا حصہ برابر تینون لڑکیون کے حصہ کے تہا ہر شخص کا حصہ دریافت کرو

(۴۵) چہرے کی گولیان ایک چہلنی مین چہانی تو جتنی چہنین وہ بن چہنی سی دو چند تہین اور پہر
ان بے چہنی گولیون کو ایک اور چہلنی مین چہانا تو چہنی گولیان بن چہنی سی سہ چند تہین اور پہر بن
چہنی کو تیسری چہلنی مین چہانا تو چہنی ہوئی بن چہنی کی چوچند تہین اور ۲۰ چہنی گولیان باقی رہین تو بتاؤ کل گولیان ہر قسم کی کتنی کتنی تہین

(۴۶) ایک قسم کی بارود مین ن فیصدی شورہ اور ص فیصدی گندک اور ح فیصدی کوئلہ تہا اور ایک دوسری
کی بارود مین ن فیصدی شورہ اور ص فیصدی گندک اور ح فیصدی کوئلہ اگر پہلی قسم کی بارود ۵ سیر مین دوسری
قسم کی ۳ سیر بارود ملائی جاوے تو اس مرکب بارود مین شورہ گندک کوئلہ کتنا کتنا فیصدی ہوگا

(۴۷) توپین جس مصالح سی بنتی ہین اوسمین ۹۰ فیصدی تانبا اور ۱۰ فیصدی ٹن ہوتا ہی اور ایک
اور قسم کی توپون مین ۶۷ فیصدی تانبا اور ۳۳ فیصدی ٹن ہی تو بتاؤ پہلی توپون کی ایک من ۱۶ سیر
مصالح مین کتنا دوسری توپ کا مصالح ملائین کہ اس مرکب مصالح مین تانبا سہ چند ٹن سی ہو

(۴۸) ۵۰۰ آدمی ایک قلعہ مین گہرے ہوئے تہے اون پاس ۶۰ دن کا کہانا پینا تہا
چودہوین دن ۸۰ آدمی مارے گئے اور چوبیسوین دن ایک ایسی لڑائی ہوئی کہ ۴۰ آدمی مرے اور ۲۰۰
خوراکین سپاہیون کی تلف ہوئین بعد ایک ہفتہ کے کمک آئی اور اس کمک کی سبب سے

اونہوں نے ایک تہائی خوراک ہر سپاہی کی گھٹا کر ۱۷ دین دن تک برسر مقابلہ اعدا کی
رہی اور بعد ازان اونکو اس قلعہ سی خلاصی ہوئی تو بتاؤ کتنے آدمی کمک کو آئی تہی

(۴۹) ایک ملک کے باشندی آدہی پڑہ سکتے ہین اور باقی باشندون مین سے ۴۲ فیصدی لکہہ پڑہ سکتے ہین
اور پہر باقی مین سے ۱۶ فیصدی لکہہ پڑہ سکتے ہین اور حساب جانتے ہین اور ۲۲۴۳۶۰۰ باشندے
نہ لکہہ سکتے ہین نہ پڑہ سکتے ہین نہ حساب کر سکتے ہین تو بتاؤ آبادی کتنی ہے

(۵۰) ایک آدمی فی ۵۲۲۳ روپیہ مین کچہہ سرکاری نوٹ ۵ روپیہ سیکڑہ سود اور ۱۰۵ روپیہ سیکڑہ
بہاؤ کے خریدے اور باقی ۳ روپیہ سیکڑہ اور ۹۶ روپیہ سیکڑہ بہاؤ کے مول لئے

اوسکی آمدنی ۲۳۹ روپیہ ۱۳ ا ۸ پائی ہو تو بتاؤ ہر ایک قسم کے نوٹ کتنے کتنے روپیہ کے اوسنے خریدے

مساوات درجہ دوم

مساوات درجہ دوم وہ مساوات ہی جسمین بعد تحویل اور اختصار کے مقدار مجہول کی سب سے اعلی قوت دو ہو

مساوات درجہ دوم کی صورت عام یہہ ہے کہ

$$ا\,لا^{2} + ب\,لا + ح = ۰$$

اسمین امثال ا اور ب اور ح مقادیر معلوم مرتسم کی گئی ہین اور لا مقدار مجہول ہی فرض کی گئی ہے
جسکی قیمت ارقام ا اور ب اور ح مین بیان کی جائیگی

مساوات درجہ دوم خالص وہ ہے کہ جسمین مقدار مجہول کی اول قوت نہ واقع ہو پس اگر ب = ۰
تو یہہ خالص مساوات درجہ دوم کی حاصل ہوگی

$$ا\,لا^{2} + ح = ۰$$

اور عمل انتقال اور تقسیم سے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

$$لا^{2} = -\frac{ح}{ا}$$

اب اگر جذر المربع طرفین کا لین تو ہم کو یہہ حل حاصل ہوگا کہ

$$لا = \pm\sqrt{-\frac{ح}{ا}}$$

مثالین

(۱) مساوات ۲ $لا^2$ − ۱۸ = ۰ کو حل کرو

انتقال اور تقسیم سے

$لا^2 = ۹$

اسواسطے $لا = \pm ۳$

دوہری علامت ± اس اصل پر مبنی ہے کہ منفی مقدار کی جفت قوتین مثبت ہوتی ہین (صفحہ ۱۹)

جیسے کہ $(-۳)^2 = -۳ \times -۳ = ۹$ اور $۳^2 = ۳ \times ۳ = ۹$ اسیواسطے اسکے بالعکس

جذرالمربع ۹ کا + ۳ اور − ۳ ہی اور سکو اکثر اسطرح لکھا کرتے ہین کہ ± ۳

(۲) مساوات $\frac{۱}{لا - ۱} - \frac{۱}{لا + ۱} = \frac{۱}{۱۲}$ کو حل کرو

اب مساوات کی کسر دور کرنے سے اور انحصار اور انتقال سے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

$لا^2 = ۲۵$

اسواسطے $لا = \pm ۵$

(۳) مساوات $\frac{۱}{۵ + لا} + \frac{۱}{۵ - لا} = \frac{۱}{۵}$ کو حل کرو

تحویل کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$لا^2 = -۲۵$

اسیواسطے $لا = \pm \sqrt{-۲۵}$

اور چونکہ $-۲۵ = ۲۵ (-۱)$

$لا = \pm ۵ \sqrt{-۱}$

اور یہہ موجب (۷۰ صفحہ) کے مقدار خیالی ہے اسے ماحصل کو ناممکن کہتے ہین کیونکہ کسی عدد کا جذر منفی نہین ہوسکتا

مساوات درجہ دوم مخلوط وہ مساوات ہی جسمین مقدار مجہول کی اول قوت بہی واقع ہو اگر مساوات

$ا لا^2 + ب لا + ح = ۰$ ہو

تو اسیطرفین مساوات کو تقسیم کریں ا پر اور $\frac{ب}{ا}$ اور $\frac{ح}{ا}$ کی جگہہ ع اور ق مندرج کرین تو مساوات کی یہہ صورت ہوگی کہ

$لا^۲ + ع\ لا + ق = ۰$

اسمین ع کو امثال یا سر دوسری رقم کا کہتے ہین اور ق کو رقم مطلق کہتے ہین یعنی اوسکی ساتھہ کوئی قید مجہول کی شامل ہونیکی نہین لگی ہوئی ہے

عمل انتقال سے $لا^۲ + ع\ لا = - ق$

ہر طرف پر $\frac{ع^۲}{۴}$ یعنی لا کی نصف سر کا مربع زیادہ کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$لا^۲ + ع\ لا + \frac{ع^۲}{۴} = - ق + \frac{ع^۲}{۴}$

دائین طرف ایک مجذور کامل ہے یعنی

$(لا + \frac{ع}{۲})^۲$

اسواسطے

$(لا + \frac{ع}{۲})^۲ = - ق + \frac{ع^۲}{۴}$

طرفین کا جذر لو تو $لا + \frac{ع}{۲} = \pm \sqrt{(- ق + \frac{ع^۲}{۴})}$

اسواسطے $لا = - \frac{ع}{۲} \pm \sqrt{- ق + \frac{ع^۲}{۴}}$

مساوات جبریہ درجہ دوم کا یہہ حل عام ہے جسمین $لا^۲$ کا سر واحد ہو مثالون کے حل کرنیمین ضرور ہے کہ اول مساوات کو ارقام مفردہ کے سلسلہ مین تحویل کرین اور $لا^۲$ کے سر پر تقسیم کرین اور قدم بقدم ترکیب مذکور کے موافق نقل کرین تاکہ حل مساوات کا حاصل ہو

اس قاعدہ سے حل مساوات کا سہل طرح حاصل ہوتا ہے کہ

قاعدہ

(۱) دوسری رقم کے سر کا نصف علامت بدل کر لکھو

(۲) اور اوسکے آگے علامت $\pm$ لکھو

(۳) اس علامت کے اندر دوسری رقم کے نصف سر کا مجذور + رقم مطلق علامت بدل کر لکھو

پس ماحصل قیمت مقدار مجہول کی ہوگی

مثالین

(۱) مساوات $لا^۲ - ۱۴\ لا + ۴۵ = ۰$ حل کرو

اب اگر ہم قدم بہ قدم موافق ترکیب عام کے چلین تو ۴۵ کو منتقل کرکے یہہ حاصل کرین کہ

$$\text{لا}^{۲} - ۱۴\,\text{لا} = -۴۵$$

اب دوسری رقم کے نصف سر کا مربع یعنی ۴۹ کو زیادہ کرو

$$\text{لا}^{۲} - ۱۴\,\text{لا} + ۴۹ = -۴۵ + ۴۹$$

$$(\text{لا} - ۷)^{۲} = ۴$$

$$\text{لا} - ۷ = \pm ۲$$

$$\text{لا} = ۷ \pm ۲$$

اگر قاعدہ کی پیروی کریں تو یہہ حاصل ہوگا

$$\text{لا} = ۷ \pm \sqrt{۴۹ - ۴۵}$$
$$= ۷ \pm ۲$$

اگر علامت + کی لیں تو لا = ۹ اور علامت − کی لیں تو لا = ۵ اسے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات درجہ دوم کے دو حل ہوتے ہین اگر دونو قیمتون مین سے ایک قیمت کو بجای لا کے مندرج کرین تو وہ نتایج حاصل ہونگے جو از روی تطابق صفر ہونگے جیسے کہ

$$۸۱ - ۱۴ \times ۹ + ۴۵ = ۰$$
$$۲۵ - ۱۴ \times ۵ + ۴۵ = ۰$$

اعداد ۹ اور ۵ کو مساوات کی جذرین یا قیمتین کہتے ہین اور یہہ بہی کہا کرتے ہین کہ ان سے شرائط مساوات کی پوری ہوتی ہین

(۲) مساوات $۲۸ = ۳\,\text{لا} + \text{لا}^{۲}$ کو حل کرو

عمل انتقال سے $\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{لا} - ۲۸ = ۰$

بموجب قاعدہ کے $\text{لا} = -\frac{۳}{۲} \pm \sqrt{\frac{۹}{۴} + ۲۸}$

$$\text{لا} = -\frac{۳}{۲} \pm \sqrt{\frac{۱۲۱}{۴}}$$

$$\text{لا} = \frac{-۳ \pm ۱۱}{۲}$$ جواب ۴ یا −۷

(۳) مساوات $\text{لا} = ۱ + \frac{۱}{\text{لا}}$

تحویل سے $\text{لا}^{۲} - \text{لا} - ۱ = ۰$

اسیواسطے $\text{لا} = \frac{۱}{۲} \pm \sqrt{\frac{۱}{۴} + ۱}$

$$= \frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$$ جواب $\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$ اور $\frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}$

اس ترکیب کو ترکیب اطالیہ کہتے ہین کیونکہ اہل اطالیہ اس ترکیب کو کام مین لاتے تہی اور اہل اطالیہ نے اول یورپ مین جبر مقابلہ کا رواج دیا

اہل ہند جو موجد اس علم کی ہیں وہ ایک اور ترکیب کو کام مین لاتے تھی اوسمین فقط یہی بات نہیں ہے
کہ وہ ایک ترکیب عامہ ہے بلکہ وہ ان مساواتون کے حل کرنے کی لئی نہایت مناسب اور عمدہ اور
بکار آمد ترکیب ہی جسمین کہ اول رقم کا کسر واحد نہ ہو
فرض کرو کہ مساوات مفروضہ

ا لا^2 + ب لا + ح = ۰

ہو تو عمل انتقال سے

ا لا^2 + ب لا = − ح

ہر طرف کو ۴ ا مین ضرب دو تو

۴ ا^2 لا^2 + ۴ ا ب لا = − ۴ ا ح

اب ب^2 طرفین مساوات پر زیادہ کرو تو

۴ ا^2 لا^2 + ۴ ا ب لا + ب^2 = ب^2 − ۴ ا ح

اب دائین طرف ایک مجذور کامل ۲ ا لا + ب کا ہی اسواسطے جذر المربع نکالنے سے

۲ ا لا + ب = ± $\sqrt{}$(ب^2 − ۴ ا ح)

اب اسطرح مساوات درجہ دوم مساوات سادہ بن گئی جسکو بہت جلدی سے ہم حل کر سکتی ہیں
اب ہم اس ترکیب کو اسی صورت مین چھوڑ دیتے ہین کیونکہ
وہ اس صورت مین یاد خوب رہ سکتی ہی اور عملاً حسب مثال مفروضہ مین جا ہین استعمال کر سکتے ہیں

(۱) مساوات ۶ لا^2 + ۵ لا − ۲۱ = ۰ کو حل کرو
ہندی ترکیب کے موافق مساوات کی تحویل سیدہی طرح سی اس مساوات سادہ کی طرف ہوتی ہے کہ

۱۲ لا + ۵ = ± $\sqrt{}$(۲۵ + ۵۰۴)

لا = (− ۵ ± ۲۳) / ۱۲

جواب لا = ۳/۲ یا − ۷/۳

(۲) مساوات (لا − ۲)/(لا + ۵) + (لا + ۱)/(لا − ۳) = ۳۳/۱۰ کو حل کرو

تحویل سے ۱۳ لا^2 + ۵۶ لا − ۶۰۵ = ۰

ترکیب بندی سے ۲۶ لا + ۵۶ = ± √(۳۱۳۶ + ۳۱۴۶۰) = ± ۱۸۶

۱۳ لا + ۲۸ = ± ۹۳ جواب ۵ یا − ۱۲۱/۱۳

(۳) چھ مرتبے کے اعشاریہ تک قیمت لا کی اس مساوات

۳/(۱ + لا) = ۵ − ۱/(۶ − لا) سے دریافت کرو

تحویل سے ۵ لا² − ۲۷ لا − ۱۱ = ۰

موافق ترکیب بندی کی ۱۰ لا − ۲۷ = ± √(۷۲۹ + ۲۲۰)

۱۰ لا = ۲۷ ± ۳۰٫۸۰۵۸۴

جواب ۵٫۷۸۰۵۸۴

۰٫۳۸۰۵۸۴

(۴) مساوات ۳ لا = ۴۱/(۱۰ − ۳ لا) کو حل کرو

تحویل سے ۹ لا² − ۳۰ لا + ۴۱ = ۰

ترکیب بندی کے موافق ۱۸ لا − ۳۰ = ± √(۹۰۰ − ۱۴۷۶)

۱۸ لا − ۳۰ = ± √(− ۵۷۶)

۱۸ لا − ۳۰ = ۲۴ √−۱

جواب لا = (۵ ± ۴ √−۱)/۳

امثلہ نمبری ۳۴

(۱) لا² + ۴ لا + ۳ = ۰

(۲) لا² + ۲ لا − ۸ = ۰

(۳) ۲ لا² − ۵ لا − ۳۳ = ۰

(۴) ۶ لا² − لا − ۱۲ = ۰

(۵) ۱۰ لا² − ۳ لا − ۶۳ = ۰

(۶) ۶۵۱ لا² + ۸۵ لا − ۱۴ = ۰

(۷) ۹ لا = ۵ − ۱/(۴ لا)

(۸) ۶ لا + ۴/(۳ لا) = ۹

(۹) ۷۷ لا = ۸ + ۱۲/(۲۷۵ لا)

(۱۰) (۲ لا − ۱)/(۲ لا + ۱) + (۳ لا + ۴)/(۳ لا − ۴) = ۲۰/۱۱

(۱۱) ۱/(۹ لا + ۴) + (۹ لا − ۴)/۱۶ = ۱

(۱۲) $\frac{۶}{لا+۱}+\frac{۷}{لا}=۳$

(۱۳) $\frac{۷}{لا+۱}+\frac{۵}{لا-۱}=۳۲$

(۱۴) $\frac{۱}{لاا+۱}+\frac{۱}{لاا-۱}=\frac{۱}{\sqrt{ق}-۱}$

(۱۵) $\frac{لا+۱}{لا-۱}-\frac{لا-۱}{لا+۱}=۱۲$

(۱۶) $\sqrt{۴لا+۱۷}+\sqrt{لا+۱}=۴$

(۱۷) $لا\sqrt{۵}+\sqrt{۲لا+۲}=\sqrt{لا+۲}$

(۱۸) $\frac{۲لا-۱۰}{۸-لا}-\frac{لا+۳}{لا-۲}=۲$

(۱۹) $\frac{۷}{لا+۴}+\frac{۲۱}{۳لا-۸}=۲۲$

(۲۰) $اج\,لا^۲-بج\,لا+اد\,لا-بد=۰$

(۲۱) $\frac{۲لا-۱}{۳لا+۲}+\frac{۲لا-۳}{۲لا+۱}=\frac{۳لا-۲}{۶لا^۲-لا-۲}$

(۲۲) $\frac{لا^۳+۵لا^۲-۲لا+۱}{لا^۲+۲لا-۱}=لا^۲+۳لا+۲$

(۲۳) $۲\sqrt{۳لا+۷}=۹۰-\sqrt{۲لا-۳}$

(۲۴) $\sqrt{۶لا+۱}+\sqrt{لا+۴+\sqrt{۶لا+۱}}=۲$

بعض اوقات مساوات درجہ دوم سے اعلیٰ درجہ کی مساواتیں موافق قواعد حل مساوات درجہ دوم کی حل ہوجاتی ہیں امثلہ ذیل میں اس بات کو دیکھ لو ۔

مثالیں

(۱) مساوات $۳۶لا^۴+۲۲۵=۱۸۱لا^۲$

اس مثال میں مقدار مجہول کی اُن دو قوت نماؤں کے ماتحت واقع ہیں جنمیں سے ایک دوسرے سے دوچند ہے فرض کرو کہ $لا^۲=ی$ یعنی $لا^۴=ی^۲$ پس مساوات مفروضہ کو اس صورت میں لکھ سکتے ہیں کہ

$$۳۶ی^۲-۱۸۱ی+۲۲۵=۰$$

جو اسطرح حل ہوتی ہے کہ

۲ی۲ − ۱۸۱ = ± √۳۶۱

۲ی۲ − ۱۸۱ = ± ۱۹

اسواسطے ی = ۲۵/۹ یا ۹/۴ جواب لا = ± ۵/۳ یا لا = ± ۳/۲

(۲) مساوات (لا۲ + لا − ۲)۲ − ۱۳(لا۲ + لا − ۲) + ۳۶ = ۰

اگر ہم فرض کرین کہ لا۲ + لا − ۲ = ی تو مساوات کو اس صورت مین لکھہ سکتے ہین کہ

ی۲ − ۱۳ی + ۳۶ = ۰

اسکی جذرین ۴ اور ۹ ہین اسواسطے ہمکو یہہ مساواتین حاصل ہونگین

لا۲ + لا − ۲ = ۴

لا۲ + لا − ۲ = ۹

اسکا حل یہہ ہے کہ لا = ۲ و −۳ اور (−۱ ± ۳√۵)/۲

(۳) مساوات لا۲ − ۲لا + ۶ √(لا۲ − ۲لا + ۵) = ۱۱ کو حل کرو

طرفین مساوات پر ۵ کو زیادہ کرو تو

لا۲ − ۲لا + ۵ + ۶ √(لا۲ − ۲لا + ۵) = ۱۶

فرض کرو کہ ی = √(لا۲ − ۲لا + ۵) تو مساوات کی یہہ صورت ہو جائیگی کہ

ی۲ + ۶ی − ۱۶ = ۰

اسکی قیمتین ۲ اور −۸ ہین

اسواسطے √(لا۲ − ۲لا + ۵) = ۲

√(لا۲ − ۲لا + ۵) = −۸

ان مساواتون کے مجذور کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے

لا۲ − ۲لا + ۱ = ۰

لا۲ − ۲لا − ۵۹ = ۰

جواب لا = ۱ یا ۱ ± ۲√۱۵

امثلہ مشق ۵۳

(۱) لا۶ + ۱۹لا۳ − ۲۱۶ = ۰

(۲) لا۲ + ۲۴ = ۱۲ √(لا۲ + ۴)

(۳) (لا − ۱/لا)۲ + ۵/۶ (لا − ۱/لا) = ۱

(۴) $۱۲\left(\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}\right)^{۲} + ۷\left(\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}\right) = ۱۲$

(۵) $\text{لا}^{۲} + \text{لا}\sqrt{\text{لا}} - ۷۲ = ۰$

(۶) $۳\text{لا} + ۱۷ = ۹\sqrt{۳\text{لا} - ۱}$

سوالات

مساوات درجہ دوم کے سوالات حل کرنیکی ترکیب امثلہ ذیل سے معلوم ہوتی ہی

مثالین

(۱) دو عدد ایسی دریافت کرو کہ اونکا مجموعہ ۱۱ ہو اور مجموعہ اونکی مربعون کا $۶۸\frac{۱}{۲}$

فرض کرو کہ ایک عدد لا ہی تو دوسرا عدد ۱۱ − لا ہوگا

اسواسطے موافق شرائط سوال کے

$$\text{لا}^{۲} + (۱۱ - \text{لا})^{۲} = ۶۸\frac{۱}{۲}$$

ارقام مفردہ مین تحویل کرنے سے یہہ حاصل ہوگا کہ

$$۴\text{لا}^{۲} - ۴۴\text{لا} + ۱۰۵ = ۰$$

اسکی قیمتین $۳\frac{۱}{۲}$ اور $۷\frac{۱}{۲}$ ہین جواب $۳\frac{۱}{۲}$ و $۷\frac{۱}{۲}$

(۲) بیج گنت مین سے یہہ سوال لکھاجاتا ہی

کچھہ شہد کی مکھیان ایک درخت پر بیٹھی تھین ایک دفعہ اونکی نصف تعداد کا جذر اڑ گیا اور دوسری دفعہ کل تعداد کا اٹھہ نوان حصہ ہوا مین چلا گیا فقط دو مکھیان بیٹھی رہ گئین تو بتاؤ کتنی مکھیان اوس درخت پر بیٹھی تھین

فرض کرو کہ تعداد مکھیون کی لا ہی تو موافق شرائط سوال کے

$$\text{لا} - \frac{۸}{۹}\text{لا} - \sqrt{\frac{۱}{۲}\text{لا}} = ۲$$

$$\text{یا}\quad \text{لا} - ۹\sqrt{\frac{۱}{۲}\text{لا}} - ۱۸ = ۰$$

فرض کرو کہ $\frac{۱}{۲}\text{لا} = \text{ی}^{۲}$ اسواسطے $\text{لا} = ۲\text{ی}^{۲}$ تو مساوات کی صورت یہہ ہوجائیگی کہ

$$۲\text{ی}^{۲} - ۹\text{ی} - ۱۸ = ۰$$

اسلئے قیمتین ۶ اور $-\frac{۳}{۲}$ ہین لیکن $\text{لا} = ۲\text{ی}^{۲}$ اسکے موافق قیمتین لا کی ۷۲ اور $\frac{۹}{۲}$ ہین لیکن انمین

دوسری قیمت محض نامناسب موافق سوال کی ہے اسلئے جواب ۲۷ ہی

(۳) ایک عدد مین دو ہندسی ہین جنکا مجموعہ ۸ ہی اور ہندسون کو مقلوب کرکی ایک اور نیا عدد بنایا گیا ہی اب اگر ان دو عددون کا حاصلضرب ۱۸۵۵ ہو تو اوس عدد کو دریافت کرو

فرض کرو کہ اول ہندسہ لا ہی اسواسطی آخر ہندسہ ۸ - لا ہوگا اور موافق نظم عشری اعداد کے ۱۰ (۸ - لا) + لا یعنی ۸۰ - ۹ لا وہ عدد ہوگا اور جب ہندسون کی ترتیب مقلوب کرینگی تو ۱۰ لا + ۸ - لا حاصل ہوگا اور ان اعداد کا حاصلضرب ۶۴۰ + ۶۴۸ لا - ۸۱ لا۲ ہی اسواسطے بموجب شرائط سوال کے

۶۴۰ + ۶۴۸ لا - ۸۱ لا۲ = ۱۸۵۵

عمل انتقال اور تقسیم سی یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

لا۲ - ۸ لا + ۱۵ = ۰

اسکی جذرین ۵ اور ۳ ہین جواب ۵۳ یا ۳۵

(۴) ا اور ب نی ساجہا الگ کیا اور ۵۱۲۰ روپیہ آپسمین تقسیم کیا ب کو ۳۸۴۰ روپیہ کا فایدہ ہوا اور ا کا حصہ اصلی روپیہ کی دو چند سی ۱۰۴۰ روپیہ بڑہ گیا تو ا اور ب کے حصے اور اونکا مول روپیہ بتلاؤ

فرض کرو کہ ا کا حصہ لا روپیہ ہی تو ب کا (۵۱۲۰ - لا) روپیہ ہوگا اور بموجب شرائط سوال کی ب کا اصل روپیہ (۳۸۴۰ - لا) اور ا کا اصل روپیہ (½ لا - ۵۲۰) ہی لیکن حصون مین وہی نسبت ہی جو اونکی اصل روپیہ مین اسواسطی

لا/۲ - ۵۲۰ : ۳۸۴۰ - لا :: لا : ۵۱۲۰ - لا

لا - ۱۰۴۰ : ۵۶۰۰ - ۲ لا :: لا : ۵۱۲۰ - لا

اطراف اور اوساط کے حاصلضرب کو مساوی لکھو اور تحویل کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

لا۲ + ۴۸۰ لا - ۵۳۲۴۸۰۰ = ۰

اب اسکی جذرین ۲۰۸۰ اور - ۲۵۶۰ ہین لیکن اخر قیمت کچہہ مناسبت سوال سے نہین رکہتی اسے معلوم ہوتا ہے کہ ا کا حصہ ۲۰۸۰ روپیہ تہا اسواسطے

جواب ا کا حصہ = ۸۰ ۲۰ روپیہ اصل روپیہ = ۳۰ ۵ روپیہ

ب کا حصہ = ۴۰ ۳۰ روپیہ اصل روپیہ = ۶۰ ۷ روپیہ

امثلہ مشق ۳۶

(۱) مجموعہ دو عددون کا ۱۵ ہی اور مجموعہ اونکے مربعون کا ۱۱۳ ہی اون اعداد کو دریافت کرو

(۲) دو عددون کا فرق ۴ ½ ہی اور اونکا حاصلضرب ۲۸ ہی اون اعداد کو دریافت کرو

(۳) مجموعہ دو عددون کا ۱۰ ۱۱/۱۲ ہی اور اونکا حاصلضرب ۲۴ ۱۱/۱۲ ہی اون اعداد کو دریافت کرو

(۴) حاصلضرب دو اعداد کا ۳۶ ہی اور فرق اونکی مربعون کا ۶۵ ہی اون اعداد کو دریافت کرو

(۵) حاصلضرب دو کسرن کا ۱۵/۲۸ ہی اور حاصلتفریق اونکی مربعون کا ۴۱/۷۸۴ ہی اونکو دریافت کرو

(۶) حاصلضرب دو اعداد کا ۱۳۰ ہی اور مجموعہ اونکی مربعون کا ۲۶۹ ہی اون اعداد کو دریافت کرو

(۷) حاصل جمع دو اعداد کا ۷ ہی اور مجموعہ اونکی مکعبون کا ۹۱ اون اعداد کو دریافت کرو

(۸) حاصل ضرب دو اعداد کا ۳۵ ہی اور اونکی مکعبون کا تفاوت ۴۰۶ ہی اون اعداد کو دریافت کرو

(۹) ایک ۳۰ فٹ کے خط کو ایسی دو حصون مین تقسیم کرو کہ ایک حصہ کو قطر بناکر جو دائرہ بنائین وہ برابر دوسرے حصہ کے مربع کے ہو اور نسبت محیط اور قطر کی ۷ : ۲۲ ہے

(۱۰) ایک شخص نے گہوڑا خریدکر ۱۱۹ روپیہ کو بیچ ڈالا اور اوسکو اس بیچنے مین فیصدی اتنے روپیہ فایدہ ہوا جتنے کو گہوڑا مول لیا تہا تو بتاؤ قیمت گہوڑی کی کیا تہی

(۱۱) ایک شخص نے ۱۰ گنی فی خچر کے حساب سے خچرین خریدکین اور ۳۵۰ پونڈ کو بیچ ڈالین اگرچہ سات خچرین رستہ مین مر گئین تہی لیکن پہر بہی اوسکو ۱۴ پونڈ کا فایدہ ہوا تو بتاؤ کتنی خچرین اوسنے بیچین

(۱۲) ایک کمرہ کا ایک ضلع دوسرے ضلع سے ۵ فیٹ بڑا ہی اور ۱۰۰۰ مربع فیٹ کاغذ اوسکی دیوارون کے لپیٹنے کے لئے درکار ہی اگر وہ تین فیٹ اور اونچا ہوتا تو فقط اوسکی تین دیوارون پر یہہ کاغذ لگ جاتا اور بڑی ضلع کی دیوار خالی رہجاتی تو بتاؤ کمرہ کتنا لمبا چوڑا ہے

۱۱۲

(۱۳) چند آدمیون نے چندہ کرکے ایک عمارت رفاہ عام کے واسطے ۲۰۰۰ روپیہ کی بنانی چاہی جب یہہ بن بناکر تیار ہوئی تو دس چندہ دینی والون کا دوالا نکل گیا تہا اور دس آدمیون نے چندہ دینے سے انکار کیا باقی آدمیون نے چندہ پورا کیا تو ہر ایک کو ۲۰ روپیہ زیادہ دینے پڑے تو بتاؤ اول چندہ دینے والے کتنے آدمی تھے

(۱۴) ایک آئینہ کا طول عرض سے ۲ فیٹ بڑا ہی اوسکے فریم کی بنوائی مین ۵ شلنگ فی فٹ لگی ہین اور اسکے نیچے کا تختہ ۱۰ شلنگ فی فٹ مربع بنا ہی اور کل قیمت ۱۱ پونڈ ۱۰ شلنگ لگی ہے تو بتاؤ آئینہ کا طول عرض کیا ہی

(۱۵) ا اور ب دو کاریگر ہین جتنی دیر مین ا ایک کام کو بناتا ہی اوسی کام کو ب ۴ گہنٹہ زیادہ لگاکر بنالیتا ہی اور ا اور ب دونو ملکر اوس کام کو ۳ ۳/۷ گہنٹہ مین بناتی ہین تو بتاؤ ہر ایک آدمی اکیلا اوس کام کو کتنی دیر مین بناتا ہی

(۱۶) ایک گروہ ملاحون کا ٹہری ہوئی پانی مین کشتی کو ۶ میل ایک گہنٹہ مین کہی رہی تہی وہ کہیتے کہیتے پانی کے بہاؤ مین آگئی اور پانچ میل اونہون نی اس بہاؤ میں کشتی کو کہیا لیکن جب الٹی پہرے تو اس الٹی دہار کے سبب بہ نسبت جانیکے دو گہنٹے زیادہ لگی تو بتاؤ دہار کی رفتار کیا تہی

(۱۷) ایک مستطیل کہیت کا رقبہ ایک ایکڑ ہے اور اوسکا گہیرا ۲۸۱ گز ہی تو بتاؤ اوسکے اضلاع کا طول کیا ہے

(۱۸) جب ایک ظرف ۲۳ ۶ منٹ مین دو نلون کے کہلنے سی بہر جاتا ہی اور اگر وہ علیحدہ علیحدہ کہولے جائین تو ایک سے بہ نسبت دوسرے کے ایک گہنٹہ ۶ منٹ دیر مین بہرجاتا ہی تو بتاؤ ہر ایک سے کتنی دیر مین ظرف بہر جائیگا

(۱۹) جب ا خط کی تقسیم موافق (۱۱ ش ۳ م) کے کیجای تو بڑی حصہ کا طول دریافت کرو

(۲۰) اگر ایک خط ایسی دو حصون مین تقسیم کیا جای کہ ایک حصہ کا مربع کل خط اور دوسرے حصہ کی مستطیل کے برابر ہو تو ان حصون کو دریافت کرو

(۲۱) ایک عدد دو ہندسون کا ہی ایک ہندسہ دوسرے ہندسہ سی بقدر ایک کے بڑا ہی اور ہندسون کے مربعون کے مجموعہ سے خود عدد بقدر ۲۶ کے چھوٹا ہی اوس عدد کو دریافت کرو

(۲۲) ایک عدد دو ہندسون کا ایک ہندسہ دوسرے ہندسہ سے بقدر ۲ کے زیادہ ہی اور ایک عدد ان دونو ہندسون کو مقلوب کرکے بنایا گیا ہی اور پہلے عدد اور اس عدد کی مربعون کا مجموعہ ۴۳۰۴ ہی تو بتاؤ وہ عدد کیا ہے

(۲۳) دو برتن مکعب کی شکل کے ہین بڑے برتن کا ظرف چھوٹے ظرف سے بقدر ۶ ۱/۲ ۱ گیلن کے زیادہ ہے اور ارتفاع بھی ۲ فٹ زیادہ ہی تو بتاؤ برتن کے کیا ابعاد ہین اور ایک مکعب فٹ مین ۶ ۱/۴ گیلن سماؤ ہوتا ہے

(۲۴) ایک قائم الزاویہ کے ضلع ۴ اور ۸۰۷ فیٹ ہین اور اوسکی گرد ۵ فیٹ گہری خندق ہی اور اوسمین ۳۰۲۰ ٹن پانی آتا ہی تو بتاؤ عرض خندق کا کیا ہی اور ایک مکعب فیدم پانی کا وزن ۶ ٹن ہوتا ہے

(۲۵) ایک شخص نے روپیہ اتنا قرض دیا کہ چار برس مین اصل مع سود کے ۴۸۱۴ روپیہ ہو گیا جب اوسے پوچھا کہ سود اسمین کسقدر ہی اور اصل کسقدر تو اوسنی یہہ جواب دیا کہ شرح سود کی اصل روپیہ کی تیسوین حصہ کی اٹھی اب اس جواب سے دریافت کرو کہ اصل کیا تھی اور سود کیا تھا

(۲۶) قسطاس عشری اور اوسکی بڑی قسطاس کے موافق عدد ۳ ۶ ۵ کا بقدر ۲۴۳ کے چھوٹا ہوتا ہی تو بتاؤ قسطاس کا اساس کیا ہی

(۲۷) دو پیپے شراب کی ۷۶ پونڈ ۵ شلنگ کو بیچا ہی اور ایک پیپہ مین نسبت دوسرے پیپے کے ۵ گیلن زیادہ ہین اور ہر شراب کی قیمت فی گیلن اتنے شلنگ ہین جتنی کہ پیپے مین گیلن ہین تو بتاؤ ہر پیپہ مین کتنے گیلن شراب ہی

(۲۸) ایک بل ۳۰۷ روز کے بعد واجب الادا ہوتا گر ایک صراف نے کھوتی کاٹ کر ۳۴۵ پونڈ ۲ شلنگ اوسکے دیدئے اگر شرح سود کی بیچاسوان حصہ بل کی جمع سی ہو تو شرح

کھوٹی کی بتاؤ

(۲۹) ایک آدمی فی ۲۰ روپیہ کی بکریان خریدین اگر ۲ بکریان زیادہ آتین تو ایک روپیہ فی بکری کم دینا پڑتا اور اگر دو بکریان کم آتین تو ایک روپیہ فی بکری زیادہ دینا پڑتا تو بتاؤ کتنی بکریان اوسنے خریدین

(۳۰) ایک گاڑی کے پچھلے پہیہ کا قطر اگلے پہیہ کے قطر سے ۲ فیٹ بڑا ہی اور یہہ چھوٹا پہیہ ۱۴۰ دفعہ زیادہ چکر بہ نسبت پہلے پہیہ کے ایک میل مین کرتا ہی تو بتاؤ اونکے قطر کیا ہین اور نسبت محیط اور قطر کی ۲۲ : ۷

مسائل مساوات درجہ دوم

مساوات درجہ دوم کی صورت عامہ یہہ ہوتی ہے

$$\text{ا}\,\text{لا}^{2} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ح} = 0$$

ا پر تقسیم کرو اور $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ اور $\frac{\text{ح}}{\text{ا}}$ کی جگہہ ع اور ق لکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{لا}^{2} + \text{ع}\,\text{لا} + \text{ق} = 0$$

اسمین اول رقم کا سر ایک ہی اور دوسری رقم کا سر ع ہی اور رقم مطلق ق ہے اب حل اس مساوات

$$\text{لا} = -\frac{\text{ع}}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{ع}^{2}}{4} - \text{ق}}$$

ہی اس سے ظاہر ہوتا ہی کہ لا کی دو قیمتین ہین اور ان قیمتون کو مساوات کی جذرین کہتے ہین اور اونکو کہا کرتی ہین کہ وہ شرائط مساوات کی پورا کرتی ہین کیونکہ اگر اونکو بجای لا کے مندرج کرین تو جملہ ثلاثی $\text{لا}^{2} + \text{ع}\,\text{لا} + \text{ق}$ ازروی تطابق صفر ہوجاتا ہی مثلاً مساوات $\text{لا}^{2} - 7\,\text{لا} + 10 = 0$ کی جذرین ۵ اور ۲ ہین اب اگر ۵ اور ۲ کو بجای لا کے مساوات مین مندرج کرین تو جملہ ثلاثی $\text{لا}^{2} - 7\,\text{لا} + 10$ ازروی تطابق صفر ہوجائیگا

مساوات درجہ دوم کی جذرین یعنی قیمتین جملہ ثلاثی $\text{لا}^{2} + \text{ع}\,\text{لا} + \text{ق}$ سے اور اونکا ع اور ق سے جو ارتباطات رکھتے ہین اونکو مقدمات ذیل مین بیان کرتے ہین

مقدمہ ۱

مساوات درجہ دوم کی رقم ثانی کا سر جسکے علامت بدل دی جاوی برابر مساوات کی قیمتون کے

مجموعہ کے ہوتا ہی

رقم مطلق برابر قیمتون کی حاصلضرب کے ہوتی ہے

فرض کرو مساوات

$$لا^2 + ع\ لا + ق = ۰$$

کی قیمتین سہ اور صہ ہین تو

$$سہ = -\frac{ع}{2} + \sqrt{-ق + \frac{ع^2}{4}}$$

$$صہ = -\frac{ع}{2} - \sqrt{-ق + \frac{ع^2}{4}}$$

جمع اور ضرب سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$سہ + صہ = -ع \quad \text{اور} \quad سہ\ صہ = ق$$

مقدمہ ۲

دوسرے درجہ کا ہر ایک جملہ اول درجہ کے اجزاء ضربی مین تحلیل ہو سکتا ہی

جملہ ثلاثی $لا^2 + ع\ لا + ق$ کو برابر صفر کے لکھو اور فرض کرو کہ مساوات قیمتین سہ اور صہ ہین تو

$$لا - سہ = لا + \frac{ع}{2} - \sqrt{-ق + \frac{ع^2}{4}}$$

$$لا - صہ = لا + \frac{ع}{2} + \sqrt{-ق + \frac{ع^2}{4}}$$

ضرب سے

$$(لا - سہ)(لا - صہ) = \left(لا + \frac{ع}{2}\right)^2 - \left(-ق + \frac{ع^2}{4}\right)$$

$$= لا^2 + ع\ لا + ق$$

اسسے معلوم ہوتا ہے کہ دو اجزاء ضربی لا — سہ اور لا — صہ ہین

اگر جملہ $ا\ لا^2 + ب\ لا + ح$ کی صورت کا ہو تو

$$ا\ لا^2 + ب\ لا + ح = ا\ (لا - سہ)\ (لا - صہ)$$

مقدمہ ۳

اگر دوسری رقم کے سر کا مربع برابر چوچند رقم مطلق کے ہو تو مساوات درجہ دوم کی قیمتین حقیقی اور برابر ہونگین اور جملہ ثلاثی ایک مجذور کامل ہوگا

مقدمہ ۱ مین جو جملے سہ اور صہ کے واسطے لکھی ہین اونسے ظاہر ہوتا ہے کہ جب جذر کی اندر صفر ہو تو قیمتین حقیقی ہین اور ہر ایک برابر $-\frac{1}{2}ع$ کے ہے اور نیز

$ع^2 = ۴ ق$

اس صورت مین اجزاء ضربی لا − سہ اور لا − صہ برابر ہوتے ہین اور جملہ ثلاثی مجذور کامل ہوتا ہے

$لا^2 + ع\,لا + ق = (لا + \tfrac{1}{2} ع)^2$

مقدمہ ۴

اگر دوسری رقم کے سر کا مربع بڑا رقم مطلق کے چوچند سی ہو تو مساوات درجہ دوم کی قیمتین حقیقی اور غیر مساوی ہونگین اور اگر کم ہوگا تو قیمتین خیالی ہونگین

اس مقدمہ کی صداقت اون حلون سے ہوتی ہی جو سہ اور صہ کے واسطے لکھی گئی ہین

اول صورت مین مقدار جو جذر کے نیچے ہی مثبت ہی اور اسیواسطے قیمتین حقیقی اور غیر مساوی ہین اور دوسری صورت مین جذر کی ماتحت مقدار منفی ہی اور اسیواسطے قیمتین خیالی یعنی ناممکن ہین

نتیجہ ۱ جب مساوات کی قیمتین خیالی ہون تو اونکی صورت $م \pm ن\sqrt{-1}$ کی ہوتی ہے اسکی اگر $-\tfrac{1}{2} ع$ کی جگہہ م اور جذر کے نیچے جو مقدار بموجب فرض کے منفی پائی گئی ہی اوسکی جگہہ $-ن^2$ لکہین تو مطلب ظاہر ہو جائیگا

نتیجہ ۲ اگر خیالی قیمتین $م + ن\sqrt{-1}$ اور $م - ن\sqrt{-1}$ ہون تو اونکو صورت مین مزدوج کہتے ہین اونکا مجموعہ ۲ م اور حاصل ضرب $م^2 + ن^2$ ہی اسیواسطے بموجب مقدمہ ۱

$-ع = ۲ م$ اور $ق = م^2 + ن^2$

نتیجہ ۳ مساوات درجہ دوم کی قیمتون کی صورت سی یہہ بات معلوم ہو جاتی ہے کہ وہ حقیقی ہین یا خیالی ہین

نتیجہ ۴ اگر مساوات درجہ دوم $ا\,لا^2 + ب\,لا + ح = ۰$ کی ہو تو موافق صورت بالا کے یہہ بیان کیا جائیگا

اگر $ب^2 - ۴ ا س = ۰$ تو قیمتین حقیقی اور مساوی ہین

اگر $ب^2 - ۴ ا س > ۰$ تو قیمتین حقیقی اور غیر مساوی

اگر $ب^2 - ۴ ا س < ۰$ تو قیمتین خیالی

نتیجہ ۵ اگر $ب^{۲} - ۴ ا س = ۰$ تو جملہ ثلاثی $ا لا^{۲} + ب لا + ح$ مجذور کامل

$لا \sqrt{ا} + \sqrt{ح}$ کا ہے

مقدمہ ۵

اگر مساوات درجہ دوم کی قیمتیں خیالی ہوں تو انکی مطابق جملہ ثلاثی مجموعہ دو مربعوں کا ہو سکتا ہے

فرض کرو کہ $م + ن \sqrt{-۱}$ اور $م - ن \sqrt{-۱}$ خیالی قیمتیں ہیں تو بموجب نتیجہ ۴ مقدمہ چہارم کے $ع = -۲م$ اور $ق = م^{۲} + ن^{۲}$ اسواسطے جملہ ثلاثی $لا^{۲} + ع لا + ق$ کا $لا^{۲} - ۲م لا + م^{۲} + ن^{۲}$ یا $(لا - م)^{۲} + لا^{۲}$ کی صورت میں بیان ہو سکتا ہے اور یہہ مجموعہ دو مربعوں کا ہے

نتیجہ ۱ کم سے کم قیمت جو اس جملہ ثلاثی کے مطابق $لا = م$ کے ہو سکتی ہے وہ $ن^{۲}$ ہے، اسواسطے کہ م سے بڑی یا چھوٹی قیمتیں لا کی جملہ ثلاثی کو غیر متناہی زیادہ کر دیتی ہیں

مقدمہ ۶

مساوات درجہ دوم کی دو سے زیادہ قیمتیں نہیں ہو سکتیں

فرض کرو اگر ممکن ہو کہ مساوات درجہ دوم $ا لا^{۲} + ب لا + ح = ۰$ کسی شرط ایطالا کی تین مختلف قیمتوں سہ اور صہ اور لہ سے پوری ہوتی ہیں تو

$$ا سہ^{۲} + ب سہ + ح = ۰$$
$$ا صہ^{۲} + ب صہ + ح = ۰$$
$$ا لہ^{۲} + ب لہ + ح = ۰$$

دوسری مساوات کو اول مساوات میں سے تفریق کرو تو

$$ا (سہ^{۲} - صہ^{۲}) + ب (سہ - صہ) = ۰$$

ہر ایک رقم کو سہ − صہ تقسیم کرو تو

$$ا (سہ + صہ) + ب = ۰$$

اور اسیطرح کا عمل کرکے اول اور سوم مساواتوں سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$ا (صہ + لہ) + ب = ۰$$

اسکو اخر مساوات سے تفریق کرو تو

$ا\,(صه - لر) = ۰$

بموجب فرض کے ا محدود ہی اسواسطے صه - لر = ۰ یعنی صه = لر اسے ثابت ہوتا ہے کہ دو سے زیادہ مختلف قیمتین لا کی جو شرائط مساوات درجہ دوم کو پورا کرین نہین ہو سکتین

امثلہ مشق ۳۷

ان ثلاثی جملونکو اجزاء ضربی مین تحلیل کرو

(۱) لا۲ - ۱۱ لا + ۱۸ (۲) لا۲ - ۹ لا - ۵۲

(۳) ۶ لا۲ + ۵ لا - ۴ (۴) ۷ - ۹ لا - ۱۰ لا۲

(۵) ۳۳ - ۴۱ لا - ۴۰ لا۲ (۶) ۹.۰ لا۲ - ۲.۰۳ لا + ۶۵

ان ثلاثی جملون کو ایسی صورت مین تحویل کرو کہ وہ مجموعہ دو مربعون کا ہو

(۷) لا۲ - ۲ لا + ۵ (۸) لا۲ + ۸ لا + ۴۱

(۹) ۹ لا۲ + ۴۲ لا + ۵۰ (۱۰) ۱۶ لا۲ - ۴۴ لا + ۵۸

حد زیادتی و کمی

حد اگر لا کی کسی خاص جملہ کی قیمت اور حد پر پہونچ جای کہ پہر اوسے آگے بڑہ نہ سکے بلکہ گہٹنا شروع ہو یا گہٹ نہ سکے بلکہ بڑہنا شروع ہو خواہ لا کی بڑی قیمت یا چہوٹی قیمت بتدریج فرض کیجای تو ہم کہا کرتے کہ جملہ کی قیمت حد زیادتی یا کمی پر پہونچ گئی

لا کے خاص جملہ کی قیمت حد زیادتی یا کمی کی اکثر اوسکو ی کی برابر لکہنے سی اور مساوات سے لا کی قیمت نکالنے سے بشرطیکہ وہ درجہ دوم کی ہو اور علامت جذر کے اندر جو مقدار ہو اوسکو برابر صفر کے لکہنے سے معلوم ہو جاتی ہے

مثالین

(۱) ایک خط ا کو ایسی دو حصون مین تقسیم کرو کہ سطح اونکی دو نو حصون کی نہایت زیادہ ہو

فرض کرو کہ لا ایک حصہ ہو تو ا ـ لا دوسرا حصہ ہوگا اور پھر فرض کرو کہ

لا (ا − لا) = د

اسواسطے

۲ لا − ا = ± √(ا² − ۴ د)

اسے ظاہر ہوتا ہی کہ اگر لا کی کوئی حقیقی قیمت ہو تو د بڑا ½ ا² سے نہیں ہو سکتا اور یہ جذر کی مقدار کو برابر صفر کے لکہنے سے حاصل ہوتی ہی پس اسکی موافق لا کی قیمت ½ ا ہے اسواسطے خط کی تنصیف کرنی چاہئے

(۲) ایک ایسا عدد دریافت کرو کہ وہ اور اوسکا مقلوب ملکر نہایت کم ہو فرضکرو کہ وہ عدد لا اور اسکا مقلوب ۱/لا ہے

لا + ۱/لا = د

لا² − د لا + ۱ = ۰

۲ لا − د = ± √(د² − ۴)

اگر لا کی حقیقی قیمت ہو تو کوئی قیمت د² کی چہوٹی ۴ سے نہیں فرض ہو سکتی اسواسطے کم از کم قیمت جملہ کی ۲ ہے اور خود عدد ایک ہی

(۳) ایک خط ا کو ایسی دو حصوں میں تقسیم کرو کہ دونو حصوں کے مربعوں کا مجموعہ نہایت کم ہو

فرض کرو کہ ایک حصہ لا ہی تو ا ـ لا دوسرا حصہ ہوگا تو

(ا − لا)² + لا² = د

۲ لا² − ۲ ا لا − د = ۰

۲ لا − ا = ± √(۸ د − ۴ ا²)

اسے ظاہر ہوتا ہے کہ د کی کم سے کم قیمت ½ ا² ہے اور اسکی موافق لا کی قیمت ½ ا ہی اسواسطے خط کی تنصیف کرنی چاہئے

(۴) قیمت (لا² − ۷ لا + ۶)/(لا − ۱۰) کی حد زیادتی اور کمی دریافت کرو

فرض کرو کہ (لا² − ۷ لا + ۶)/(لا − ۱۰) = د

لا² − (۷ + د) لا + ۱۰ د + ۶ = ۰

۲ لا − ۷ − د = ± √((د − ۲۵) (د − ۱))

اب لا کی حقیقی ہونے کے واسطے ضرور ہے کہ د کی قیمت ۱ اور ۲۵ کے درمیان نہ واقع ہو

لیکن ایک سلسلہ قیمتون کا ۲۵ سی بڑہ ۲ تک اور ایک سے چہوٹا ایک تک ہوسکتا ہی پس بموجب حدود کے جملہ مفروضہ کی قیمت کم سے کم ۲۵ اور زیادہ سے زیادہ ا ہے

امثلہ مشق ۳۸

(۱) ایک خط ا کو دو ایسی حصون مین تقسیم کرو کہ م گنا مربع ایک حصہ کا + ن گنا مربع دوسرے حصہ کا نہایت کم ہو

(۲) ایک عدد کو ایسی دو اجزا ضربی مین تقسیم کرو کہ مجموعہ اونکے مربعون کا نہایت کم ہو

(۳) جملہ $\frac{(ا + لا)(ب + لا)}{لا}$ کی قیمتین حد زیادتی اور کمی کی دریافت کرو

(۴) جملہ $\frac{۹ لا^۲ + ۲ لا - ۷}{۱۲ لا - ۸}$ کی قیمتین حد زیادتی اور کمی کی دریافت کرو

(۵) جملہ $\frac{ا}{لا} + \frac{ب}{ا - لا}$ کی قیمتین حد زیادتی اور کمی کی دریافت کرو

مساواتین جنمین دو مقدارین مجہول ہون

شرائط سوال کے بیان کرنےمین بڑی آسانی اسمین ہوتی کہ جن مقادیر کا معلوم کرنا مقصود ہوا و نکو دو یا زیادہ رموز سے تعبیر کرین اور پہر عمل اسقاط سے شرائط مفروضہ کو ایک مساوات مین لے آئین جسمین فقط ایک مقدار مجہول ہو

مثال

ایک گہر مین بہن بہائی تہے جب اون سے پوچہا گیا کہ تم کتنے بہائی اور کتنی بہنین ہو تو سب سے بڑی بہن نے جواب دیا کہ میری جتنی بہائی ہین اوتنی ہی بہنین ہین اور بڑے بہائی نے کہا کہ میری بہائی مری بہنون سے آدہی ہین تو بتاؤ یہہ کتنے بہن بہائی تہے

فرض کرو کہ بہائیون کی تعداد لا ہے اور بہنون کی تعداد ر ہے

پس بموجب بہن کے جواب کے

$$ر - ۱ = لا$$

اور بموجب بہائی کے جواب کے $$لا - ۱ = \frac{۱}{۲} ر$$

اب ان دو ہمزاد مساواتون مین دو مقدارین مجہول ہین اب وہ اسطرح ایک مساوات مین تحویل ہوسکتی ہین جسمین فقط ایک مقدار مجہول ہوگی بموجب مساوات اول ر = لا + ۱

اب اس قیمت ء کو دوسری مساوات (۲) مین مندرج کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

لا − ۱ = (لا + ۱) / ۲

کسور کے دور کرنے سے

۲لا − ۲ = لا + ۱

عمل انتقال سے

لا = ۳

اور چونکہ ء = لا + ۱ اسواسطے ء = ۴

پس اوس گھر مین بہائی اور بہنین ہین

اسقاط

اب چار ترکیبین اسقاط کی ہین اونکو اب بیان کرتی ہین اول ہم ان ترکیبون کو اوس صورت مین بیان کرتے ہین کہ دو ہمزاد مساواتین اول درجہ کی ہون اور اونمین دو مقدارین مجہول ہون اور اون چار ترکیبون کے نام یہہ ہین

اندراج قیمت
مقابلہ کرنا
ضرب چلیپائی
مضروب قید اختیاری

اندراج قیمت کی ترکیب

ترکیب اندراج قیمت یہہ ہے کہ ایک مساوات سے قیمت ایک مقدار مجہول کی دوسری مقدار مجہول کی رقمون مین دریافت کرکے دوسری مساوات مین اوس مجہول کی جگہہ مندرج کرین

مثال

ان ہمزاد مساواتون ۸لا − ۳ء = ۹
۵لا + ۷ء = ۵۰

کو حل کرو

اول مساوات سے ء = (۸لا − ۹) / ۳

ء کی اس قیمت کو دوسری مساوات مین مندرج کرو تو مساوات ذیل حاصل ہوگی جسمین صرف لا ہے

۵لا + ۷(۸لا − ۹) / ۳ = ۵۰

اور حل مساوات کا یہہ ہے کہ لا = ۳

اوراس لا کی قیمت کو معادلات مفروضہ مین سے کسی ایک مساوات مین مثلاً اول مین رکھو تو

۲۴ − ۳ی = ۹

حل مساوات ی = ۵

اس ترکیب کے موافق ہم لا کو اسقاط کرکے ی کی مساوات حاصل کرسکتے ہین قیمتین لا اور ی کی ایک ہی وقت مین ان ہمزاد مساواتون کی شرائط کو پورا کرینگے

امثلہ مشق ۳۹

(۱) لا + ی = ۷
لا − ی = ۱

(۲) لا + ی = ۳
۲لا + ی = ۴

(۳) ۵لا + ۲ی = ۲۹
۶لا − ۲ی = ۲۶

(۴) ۸لا + ۳ی = ۲۵
۷لا + ۳ی = ۲۳

(۵) ۴لا + ۲ی = ۲۶
۲لا − ی = ۳

(۶) ۵لا + ۴ = ۲ی
۴لا + ی = ۲۸

(۷) لا + ۳ی = ۱۳
۳لا − ی = ۹

(۸) ۲لا + ی = ۳۲
۳لا − ۲ی = ۶

(۹) ۷لا − ۶ی = ۳
۱۰ی − ۱۱لا = ۱

(۱۰) ۲لا + ۵ی = ۲ ۱/۲
۵لا + ۲ی = ۲ ۱/۲

(۱۱) ۲لا + ۳ی = ۴۳
۱۰لا − ی = ۷

(۱۲) ۴لا + ۸ی = ۴ ۳/ی
۱۰ی ۲لا − ۶ی = ۴۸ی ۳

(۱۳) ۳لا + ۲ی = ۱۱۸
لا + ۵ی = ۱۹۱

(۱۴) ۵لا − ۷ی = −۳۵ ۱/۲
۲لا − ی = ۵/۶

(۱۵) ۱۰ی = ۲لا
۱۹لا = ۶۰ی + ۶۲۱ ۱/۴

(۱۶) ۷لا + ۵/۲ ی = ۴۱۱ ۱/۲
۱۴ی − ۳۹لا = ۹۳۵ ۹/۱۰

(۱۷) ۳لا − ۲ی = ۹۶
۸لا − ۵ی = ۴۸۰

(۱۸) ۴لا + ۵ی = ۴۰ (لا − ی)
۲لا + ۵ی = ۱ ۱/۲

(۱۹) لا + ۱/۱۱ ی = ۷۱
ی − ۱/۱۳ لا = ۶۱

(۲۰) لا + ۱۷ی = ۳۰۰
۱۱لا − ی = ۱۰۴

مقابلہ کرنیکی ترکیب

ترکیب مقابلہ کرنیکی یہہ ہے کہ معادلات مفروضہ مین سے ہر ایک سے قیمت ایک ہی مجہول کی دوسرے مجہول کی ارقام مین دریافت کرو اور ان متحصلہ قیمتون کو مساوی لکھو

مثال

مساواتون ۱۱ ی − ۳ للہ = ۵۹ حل کرو
۸ ی + ۵ للہ = ۸۶

اول مساوات سے ی = (۵۹ + ۳ للہ) / ۱۱

دوسری مساوات سے ی = (۸۶ − ۵ للہ) / ۸

ان قیمتون کو مساوی لکھو

(۵۹ + ۳ للہ) / ۱۱ = (۸۶ − ۵ للہ) / ۸

یہہ مساوات صرف للہ کی ہی جسکو تحویل اور حل کرکے ہمکو یہہ حاصل کرتے ہین کہ للہ = ۶ اس قیمت کو کسی ایک مساوات مین مندرج کرو تو ی = ۷ کے حاصل ہوگا

امثلہ مشق ۴۰

(۱) ۷ للہ − ۳ ی = ۱۹ ؛ ۴ للہ + ۷ ی = ۳۷
(۲) ۱۰ للہ + ی = ۳۵ ؛ ۷ ی = ۳ للہ + ۴۹
(۳) ۴ ی + ۳ للہ = ۳۵ ؛ ۷ ی + ۲ للہ = ۵۸
(۴) ۴ للہ + ۹ ی = ۵ ؛ ۶ (للہ − ی) = ۱
(۵) للہ + ۷ ی = ۲ ؛ للہ + ی = ۱۱/۲۸
(۶) ۲ للہ − ۹ ی = ۰ ؛ ۱۲ ی + ۸ للہ = ۱۶
(۷) للہ − ی = ۱/۶ ؛ ۳ ی − ی = ۲
(۸) ۵ للہ + ۴ ی = ۲۵ ؛ ۱۴ للہ + ۶ ی = ۱۴ ۱/۱۰
(۹) ۲۲ للہ − ی = ۳۳ ؛ (للہ + ی) / (۵ للہ − ی) + ۵/۸ = ۰
(۱۰) ۶ للہ + ی = ۲۱ ؛ ۵ للہ − ۴ ی = ۲۷ ۱/۴
(۱۱) ۱۲ للہ + ۱۶ ی = ۱۰۰ ؛ للہ − ۳ ی = ۱۰
(۱۲) (ی + للہ) / (ی − للہ) = ۱۲ ؛ (۳ للہ − ی) − (۲ ی − للہ) / ۵ = ۷
(۱۳) ۲ (۳ للہ + ی) = ۳ (ی − للہ) + ۱ ؛ ی − ۳ للہ = ۱
(۱۴) ۵۶ (۱ − للہ − ی) = ۵ ؛ ۵۱ (ی − للہ) = ۱۹ (ی + للہ)
(۱۵) للہ + ۱/۲ ی = ۱۷ ؛ (۲ ی − للہ) / (۳ للہ + ی) = ۱۳/۴۵
(۱۶) ۱/للہ + ۱/ی = ۸/۹ ؛ ۴ للہ − ۳ ی = ۲ للہ ی

ضرب چلیپائی

ضرب چلیپائی کی ترکیب یہہ ہے کہ اول مساواتون کو سادی صورت مین تحویل کرو اور پہر اول مساوات مین

جو کسی ایک مجہول کا ہو اوسکو دوسری مساوات مین ضرب دو اور دوسری مساوات مین جو
سرا وسی مجہول کا ہو اوسکو پہلی مساوات مین ضرب دو تو اس ترکیب سی اشال ایک مجہول کی
دونو مساواتون سے متطابق ہوجائینگی اگر اونکی ایک ہی علامت ہو تو تفریق کرنے سی اور اگر
اونکی مختلف علامت ہو تو جمع کرنے سے ایک مساوات ایک مجہول کی حاصل ہوگی

مثالین

۷ لد − ۹ ی = ۲۹ کو حل کرو
۱۳ لد + ۴ ی = ۱۱۶

اول مساوات کو ۴ مین اور دوسری کو ۹ مین ضرب دو تو

۲۸ لد − ۳۶ ی = ۱۱۶
۱۱۷ لد + ۳۶ ی = ۱۰۴۴

اب اشال ۳۶ کی علامتین مختلف ہین پس مساواتون کو ی سے ساقط کرنیکے لئے جمع کیا تو

۱۴۵ لد = ۱۱۶۰
لد = ۸

اب لد کے ساقط کرنیکے واسطے اول مساوات کو ۱۳ مین اور دوسری کو ۷ مین ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا

۹۱ لد − ۱۱۷ ی = ۳۷۷
۹۱ لد + ۲۸ ی = ۸۱۲

دونو مساواتون مین اشال ۹۱ کی ایک ہی علامت ہی اول کو دوم مین سے تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا

۱۴۵ ی = ۴۳۵
اسیواسطے ی = ۳

جواب لد = ۸ ، ی = ۳

(۲) مساواتون ۱۸ لد − ۱۵ ی = ۴۵ کو حل کرو
۲۷ لد + ۲۱ ی = ۱۹۸

اس مثال مین اور اسی قبیل کی اور مثالون مین خود اشال کی ضرب چلیپائی کی ضرورت نہین ہے
کیونکہ اونکی قائم مقام چھوٹے اعداد اشال کی نسبت کی موافق مقرر ہوسکتی ہین اشال
مین ی کے دور کرنیکے واسطے ۲۱ اور ۱۵ کی نسبت کے موافق اعداد ۷ و ۳ ہوسکتی ہو
اسلئے ان اعداد مین بجای اشال کے ضرب دونو کی اشال متطابق ہوجاینگی

۱۲۶ لد − ۱۰۵ ی = ۳۱۵
۱۳۵ لد + ۱۰۵ ی = ۹۹۰

جمع کرنے سے ۲۶۱ لا = ۱۳۰۵

اسیواسطے لا = ۵

لا کے دور کرنیکے واسطے اول مساوات کو ۳ مین اور دوسری کو ۲ مین ضرب دو

۵۴ لا − ۴۵ ی = ۱۳۵

۵۴ لا + ۴۲ ی = ۳۹۶

تفریق کرنی سے ۸۷ ی = ۲۶۱

اسیواسطے ی = ۳ جواب لا = ۵، ی = ۳

(۳) مساواتون ۱/۴لا − ۱/۳ی = ۱/۶ کو حل کرو

لا − ی / لا ی = − ۲۳/۶

دوسری مساوات کی تحویل ہوکر

۱/ی − ۱/لا = ۲۳/۶

اسکو ۴ پر تقسیم کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

۱/۴ی − ۱/۴لا = ۲۳/۲۴

اس مساوات مین اور اول مساوات مین اشکال ۱/۴لا کے تطابق ہین

تفریق کرنے سے (۱/۴ − ۱/۳) ۱/ی = ۵/۲۴

اسیواسطے ی = − ۲/۵

۳ پر تقسیم کرنے سے اور تفریق کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

(۱/۳ − ۱/۴) ۱/لا = ۲/۱۸ اور لا = ۳/۴ جواب لا = ۳/۴، ی = − ۲/۵

(۴) معادلات ی − ۱۰ / ۲ = لا − ۱ / ۳ − لا − ی / ۵

۲ی + ۴ − ۲لا + ی / ۸ = لا + ۱۳ / ۴ کو حل کرو

جب ان مساواتون کو تحویل کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

۱۶ لا − ۱۵ ی + ۳۸ = ۰

۲ لا − ۳ ی + ۴۶ = ۰

پہلی ترکیب ضرب چلیپائی تفریق کرنے سے ہمکو ایک اور مساوات حاصل ہوتی ہی جسکی امثال چھوٹی ہوتی ہین اور وہ قائم مقام ایک مساوات مفروضہ کی ہوسکتی ہے

دوم کو اول مین سے تفریق کرو

۴لد − ۲ی − ۸ = ۰

۲لد − ی − ۴ =

اب انمین سے دوسرے کو ۲ مین ضرب دو اور اول مین سے تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

− ۷ی + ۷۰ = ۰

اسواسطے ی = ۱۰

دوسری مساوات مین اس قیمت کو رکہو اور لد کی قیمت دریافت کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

لد = ۷ جواب لد = ۷ ، ی = ۱۰

عام قاعدہ یہہ ہے کہ معادلات مفروضہ مین سے ہر ایک کی جگہہ اونکا مجموعہ یا فرق کہتے مین جو ایک عدد مین ضرب دیا گیا ہوتا ہی بہت سی صورتین ایسی ہوتی ہین کہ مضروب اسطرح منتخب ہو سکتا ہے کہ اوسے ایک اور زوج مساوات کا ایسا حاصل ہوجاے کہ اوسکے امثال بہ نسبت اصلی مساواتون کے چھوٹے ہون اور اس سبب قیمت کا دریافت کرنا آسان ہو

امثلہ مشق ۱۴

(۱) ۷ی − ۳لد = ۴۱
۳ی + ۴لد = ۱

(۲) ۲۲لد − ۱۴ی = ۲۹
۳لد − ۲ی = ۴

(۳) ۱۵لد + ۴ی = ۵۴
۱۳لد − ۴ی = ۶۱

(۴) ۲لد + ۷ی = ۱۰ ۱/۴
۳لد − ۵ی = ۳ ۳/۴

(۵) ۹لد − ۱۱ی = ۲۶
۷لد + ۳ی = ۱۷ ۳/۱۱

(۶) ۱۰لد + ۴۲ی + ۹۳ = ۰
۲۲لد + ۱۴ی + ۷ = ۰

(۷) ۱۰۵لد − ۳۶ی + ۸ = ۰
۹لد + ۷ی + ۶ = ۰

(۸) ۷۷۰لد + ۶۰۵ی = ۱۹۷
۱۱لد − ۵ی = ۱۱

(۹) لد/۲ = (ی − ۲۳)/۳
۵لد/۲ + ی/۷ + ۱۳ = ۰

(۱۰) ۳ی/۸ − لد/۵ + ۲۴ = ۰
ی/۷ + لد/۳ + ۱۱ = ۰

(۱۱) ۳لد/۷ − ی = ۲۴
۴لد − ی/۹ = ۵۸

(۱۲) ۱۳لد/۷ − ۱۱ی/۵ = ۱۴۴
۴لد/۳ + ۷ی/۶ + ۳ = ۰

(۱۳) ۵(لد + ۱) + ۳(۲ی − ۵) = ۲
۴لد − ۱۰ی = ۱۷

(۱۴) (۳لد − ۴ی)/(لد + ی) = ۵۲
۷لد + ۸ی = ۰

(١٥) ی/٤ − لا/٧ = ٢ ‏، (١١لا + ۵ی)/٣ + ۵ی = ١
(١٦) ١/٢ی − ١/٣لا = ١/١۵ ‏، (ی − ۵لا + ٤لای)/٤لای = ١/١۵

مضروب فیہ اختیاری

مضروب فیہ اختیاری کی یہہ ترکیب ہے کہ کسی مساوات کو مفروضہ مساواتون مین کسی مضروب اختیاری م مین ضرب دو اور پہر مساواتو نکو جمع کرو اور امثال ی کو برابر صفر کے لکہو اور اسسے م کی قیمت دریافت کرو اور اوسکو امثال لا مین مندرج کرکے قیمت لا کی دریافت کرو اور اسیطرح قیمت ی کی معلوم کرو

امثال

مساواتون ۵ لا + ٢٨ ی = ۵٨
١١ لا − ٧ ی = ١۵ ‏ کو حل کرو

دوسری مساوات کو م مین ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ
١١م لا − ٧م ی = ١۵م
اسکو اول مساوات پر زیادہ کرو تو

(۵ + ١١م) لا + (٢٨ − ٧م) ی = ۵٨ + ١۵م

اب ی کے ساقط کرنیکے واسطے اسکی امثال کو برابر صفر کے لکہو
٢٨ − ٧م = ٠
اب یہہ باقی رہتا ہے کہ (۵ + ١١م) لا = ۵٨ + ١۵م
لیکن اون امثال سے کہ برابر صفر کے لکہی ہین م = ٤ اس قیمت کو اخر مساوات مین مندرج کرو تو
٤٩ لا = ١١٨

اب لا کے ساقط کرنیکے واسطے ہم اوسکی امثال کو برابر صفر کے لکہدین تو
۵ + ١١م = ٠
اسسے م = − ۵/١١
اب اس قیمت کو
(٢٨ − ٧م) ی = ۵٨ + ١۵م
مین مندرج کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ
(٢٨ + ٣۵/١١) ی = ۵٨ − ٧۵/١١

یعنی ۱۳ی = ۱۳ ۱۴

اسیواسطے ی = ۱ جواب لا = ۲
ی = ۱

امثلہ مشق ۴۳

(۱) ۴لا + ۵ی = ۷ (۲) ۷لا + ۳ی = ۱۳
۳لا − ۱۰ی = ۱۹ ۱۳لا − ۶ی = ۱۱۴

(۳) ۸لا + ۳ی = ۵ (۴) ۲لا + ی = $\frac{۱}{۲}$
۱۰لا + ۹ی = ۸ ۱۸لا + ۲۴ی = ۴۸

(۵) $\frac{۱}{۳ی} - \frac{۱}{۲لا} = \frac{۱}{۳۴۶}$ (۶) ۶(لا − ۲ی) = ۱۳ لای
$\frac{۱}{۸ی} - \frac{۱}{۶لا} = \frac{۳۲}{۳۴۶}$ $\frac{۴}{لا} + \frac{۶}{ی} = ۳$

(۷) $\frac{لا + ی}{لای} + \frac{۱}{۱۲} = ۰$ (۸) ۱۱لا + ۹ی = ۴۰
$\frac{۱}{۷ی} + \frac{۱}{لا} = \frac{۱۷}{۸۴}$ $\frac{۳لا + ی}{۸} - \frac{۳لا - ی}{۳۸} = ۲$

پہلے اسے کہ لا اور ی کی درجہ اول کی ہمزاد مساواتون کے زوج کو حل کرو اونکو سادہ صورت مین تحویل کرو اور اونکی سادہ صورت کا چہرہ یہہ ہے کہ

ا لا + ب ی = ح
اَ لا + بَ ی = حَ

تجربہ سے یہہ بات معلوم ہوجائیگی کہ چارون ترکیبون مین کونسی ترکیب اسقاط مجہول کی عمل مین لانی چاہیے اکثر ترکیب ضرب چلیپا کی استعمال مین آتی ہے بعض اوقات مساواتون کی تحویل اس صورت کی ہوتی ہے کہ

$\frac{ا}{لا} + \frac{ب}{ی} = ح$
$\frac{اَ}{لا} + \frac{بَ}{ی} = حَ$

اب یو اور مو کو $\frac{۱}{لا}$ اور $\frac{۱}{ی}$ کی جگہہ رکھو تو مساواتون کے چہرہ یہہ ہونگے کہ

ا یو + ب مو = ح
اَ یو + بَ مو = حَ

(۱) لا + ی = ۳۱ (۲) لا + ۲ی = ۸$\frac{۱}{۲}$
لا − ی = ۸ ۲ی − لا = ۱$\frac{۱}{۲}$

(۳۱) (لا+ی)^۲ − (لا−ی)^۲ = (۲لا+۳)(۲ی−۳)+۳

(لا−۱)(ی−۱)+۴ = لای+۷(۲ی−۳لا)

(۳۲) (لا−۲)/(ی−۳) − (لا+۱)/(ی+۵) = ی^۲/(ی^۲+۲ی−۱۵) − ۱

(۳۳) √(۲ے+لا^۲+۴ی^۲+۴لای) = لا+۲ی+۲

√(لا+۱) + √(ی+۲) = √(لا+ی+۳) + √(۶۰+۴لای)

(۳۴) (۴لا^۲+۲لای+۲۸۸−۶ی^۲)/(۲لا+۱۳−۲ی) = ۲لا+۳ی−۱۳۱

۵لا−۴ی = ۲۲

(۳۵) √(۴لا^۲−۱۲لای+۹ی^۲+۶لا+۷ی−۸) = ۲لا−۳ی+۱

(لا−۲)/(ی+۳) = ۴½

(۳۶) ۱/√(لا−۳) − ۱/√(ی−۲) = ۱/۶

√((۲−ی)/(۳+لا)) × √((۳+لا)/(۳−لا)) = ۱½

(۳۷) √ی − √(ے−لا) + √(ی−لا) = ۰

√ی − √(۵−لا) − √(ی−لا) = ۰

(۳۸) √(لا^۲+۲ی−۱) = ۱+لا

√(ی^۲+۳لا) = ۱+ی

(۳۹) √(لا+ی) + √(لا−ی) = √(۲لا+۶) √(لا+ی)

۲ی(۵لا−۳ی)/(۵لا−۳ی+۹) = ۲ی+۷

(۴۰) √(۴لا(لا−۳ی)+۳(لا−۳)+ی(۲+۳ی)) = ۲لا−۳ی+۱

(۳+لا)(۵−۲ی) − ۲۰ = ی+۲لا(۱−ی)

(۴۱) ا لا + ب ی = ح
م لا + ن ی = ع

(۴۲) ا۱ لا + ا۲ ی + ا۳ = ۰
ب۱ لا + ب۲ ی + ب۳ = ۰

(۴۳) ا/لا + ب/ی = ح
ع لا ی = ق(ی−لا)

(۴۴) ر لا + م = ت ی + ن
(لا+ی)/(لا−ی) = م/ن

(۴۵) ل / (ن‌ا − ۱) − ی / (ا − ۱) = ا − ن

ل / (ا + ۱) + ی / (ن + ۱) + ۲ = ا + ن

(۴۶) م / (ن + ی) = ن / (م − ل) و ع / (و − ل) = و / (ع + ی)

(۴۷) ا (ا − ل) / ب (ا − ی) = (ا − ا) / (ب − ا)   ا ل = ب ی

(۴۸) ۱/ل − ۱/ی = ۱/ق   ل ل + م ی = ک ل ی

امثال حرفی

اگر دو ہمزاد مساوات اول درجہ کی ہون اور انکی امثال حرفی ہون تو ضرب جلیبا کی ترکیب سے اجتماع و ترکیب بالقرینہ بڑے کام کے حاصل ہوتے ہین

فرض کرو کہ مساواتین اس صورت مین تعبیر کیجائین کہ

ا۱ ل + ا۲ ی + ا۳ = ۰   (۱)

ب۱ ل + ب۲ ی + ب۳ = ۰   (۲)

(۱) کو ب۲ مین اور (۲) کو ا۲ مین ضرب دو اور تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

(ا۱ ب۲ − ا۲ ب۱) ل + ا۳ ب۲ − ا۲ ب۳ = ۰

اسیواسطے ل = (ا۲ ب۳ − ا۳ ب۲) / (ا۱ ب۲ − ا۲ ب۱)

اور اسیطرح سے ل کو ساقط کرکے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ی = (ا۳ ب۱ − ا۱ ب۳) / (ا۱ ب۲ − ا۲ ب۱)

اگر ان ل اور ی کی قیمتون کو مساواتون (۱) اور (۲) مین رکھین اور ماحصل کے نسب نما مشترک کو (ا۱ ب۲ − ا۲ ب۱) مین ضرب دین تو ہمکو یہہ متطابقی حاصل ہونگی

ا۱ (ا۲ ب۳ − ا۳ ب۲) + ا۲ (ا۳ ب۱ − ا۱ ب۳) + ا۳ (ا۱ ب۲ − ا۲ ب۱) = ۰ (۳)

ب۱ (ا۲ ب۳ − ا۳ ب۲) + ب۲ (ا۳ ب۱ − ا۱ ب۳) + ب۳ (ا۱ ب۲ − ا۲ ب۱) = ۰ (۴)

ان مساواتون مین حروف ا۱ و ا۲ و ا۳ و ب۱ و ب۲ و ب۳ کی بالقرینہ ترکیبین ہین اور انکو متطابقی بھی کہتے ہین کیونکہ خطوط وحدانی کے دور کرنے سے ارقام باہم فنا ہوجاتی ہین اور یہی ہونا بھی [illegible]

کیونکہ لا اور ی کی قیمتون سے دونو مساواتون کی شرائط پوری ہونی چاہیے

اس علم الجبرا کے منتہا کی تحقیقات مین جملون

(ا۲ ب۳ − ا۳ ب۲) و (ا۳ ب۱ − ا۱ ب۳) و (ا۱ ب۲ − ا۲ ب۱)

کو مقطعات اون حروف کا کہتے ہین جنسے کہ وہ بنتے ہین

معادلات جنمین تین مقادیر مجہول ہون

اگر تین مساواتین تین مقادیر مجہول کی حل کرنیکے واسطے پیش کی جائین تو اونکی حل کرنیکا طریقہ یہہ ہے کہ اول اور دوم مساواتون مین سے ایک مقدار مجہول کو ساقط کرو اور پہر اول اور سوم مین یا دوم و سوم مین اوسی مقدار مجہول کو ساقط کرو تو اس طرح دو مساواتین حاصل ہونگین جنمین دو مقادیر مجہول ہونگین اور ان مساواتون سے قیمتین دونو مقادیر مجہول کی ایک ایک مجہول کو باری باری سے ساقط کرنے سے حاصل ہو سکتی ہین جس طرح اوپر کی مثالون مین بیان ہوا

اب ہم ہمزاد تین مساواتین تین مقدار مجہول کی اول درجہ کی پہلے فرض کرتے ہین اور اکثر اونکی اثار یہہ ہو

ا۱ لا + ب۱ ی + ح۱ ی + د۱ = ۰

ا۲ لا + ب۲ ی + ح۲ ی + د۲ = ۰

ا۳ لا + ب۳ ی + ح۳ ی + د۳ = ۰

مثالین

ان ہمزاد مساواتون کو حل کرو

۲ لا − ۳ ی + ی = ۱

۳ لا − ۵ ی + ی = ۳

۴ لا + ۲ ی − ۳ ی = ۱۲

اول مساوات کو ۳ مین ضرب دو اور دوم کو تفریق کرو تو مساوات لا اور ی کی ذیل مین حاصل ہوگی ۵ لا − ۷ ی = ۱

اول مساوات کو ۳ مین ضرب دو اور تیسرے کو جمع کرو تو ایک دوسرے مساوات لا اور ی کی معلوم ہوگی یعنی

۱۰ لا − ۷ ی = ۱۶

اسے اخر مساوات کو تفریق کرو اور ی کو ساقط کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ ۵ لا = ۱۵ یعنی لا = ۳

اس قیمت کو اخر دونو مساواتون مین سے کسی ایک مساوات مین رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ ی = ۲

لا اور ک کی جگہہ ان قیمتون کو معادلات مفروضہ مین سی کسی ایک کے اندر رکھنی سی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ی = ۱

جواب لا = ۳
ک = ۲
ی = ۱

مساوات (۳) اور (۴) صفحہ ۱۳۱ سے معلوم ہوتا ہے کہ ترکیب ضرب چلیبا سے ایسی صورت حاصل ہوتی ہے کہ دو مقادیر مجہول کو ایک ہی دفعہ عمل کرنے سے ساقط کر سکتی ہین

اب اس ترکیب کی اصل تبلانی کے واسطی تین مساواتین ایسی فرض کرتے ہین کہ جسمین امثال حرفی ہون

ا۱ لا + ب۱ ک + ح۱ ی + د۱ = ۰
ا۲ لا + ب۲ ک + ح۲ ی + د۲ = ۰
ا۳ لا + ب۳ ک + ح۳ ی + د۳ = ۰

اول مساوات کو مقطع (ا۲ ب۳ − ا۳ ب۲) مین اور دوسری مساوات کو مقطع (ا۳ ب۱ − ا۱ ب۳) مین اور تیسری مساوات کو مقطع (ا۱ ب۲ − ا۲ ب۱) ضرب دے اور حاصلون کو آپسمین جمع کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

[ا۱ (ا۲ ب۳ − ا۳ ب۲) + ا۲ (ا۳ ب۱ − ا۱ ب۳) + ا۳ (ا۱ ب۲ − ا۲ ب۱)] لا
+ [ب۱ (ا۲ ب۳ − ا۳ ب۲) + ب۲ (ا۳ ب۱ − ا۱ ب۳) + ب۳ (ا۱ ب۲ − ا۲ ب۱)] ک
+ [ح۱ (ا۲ ب۳ − ا۳ ب۲) + ح۲ (ا۳ ب۱ − ا۱ ب۳) + ح۳ (ا۱ ب۲ − ا۲ ب۱)] ی
+ [د۱ (ا۲ ب۳ − ا۳ ب۲) + د۲ (ا۳ ب۱ − ا۱ ب۳) + د۳ (ا۱ ب۲ − ا۲ ب۱)] = ۰

بموجب مساواتون (۳) اور (۴) کے امثال لا اور ک کے ازروی تطابق کے صفر ہین پس ایک نظم مضروب فیہ اختیاری کو مساواتون کے اندر استعمال کرنی سی ایک ہی عمل سی مساوات ایک مقدار مجہول ی کی حاصل ہو جائیگی اور اوسی قیمت ی کی معلوم ہو جائیگی اور اسیطرح سی لا اور ی اور نیز ک اور ی بھی ساقط ہو سکتی ہین اور لا اور ک کی قیمتین ایک عمل سے معلوم ہو سکتی ہین اوپر کی مساوات مین ی کے امثال اور رقم مطلق مقطعات اون حرفون کے کہلاتی ہین جنسے کہ وہ مرکب [illegible]

ا۱ و ب۱ و ح۱	و	ا۱ و ب۱ و د۱
ا۲ و ب۲ و ح۲		ا۲ و ب۲ و د۲
ا۳ و ب۳ و ح۳		ا۳ و ب۳ و د۳

یہہ ترکیب امثال عددی کی صورت مین نہایت آسانی سی عمل مین آتی ہی چنانچہ امثلہ ذیل مین اسبات کو دیکھو

امثلہ

(۱) اخر مثال مین جو مساواتین ہین اونکو حل کرو یعنی

۲ لا − ۳ ر + ی = ۱
۳ لا − ۵ ر + ۴ ی = ۳
۴ لا + ۲ ر − ۳ ی = ۱۳

مضروب فیہون کی ایک نظم سی لا اور ر تاکہ ساقط ہو جائین امثال کی اول اور دوم عمودی سطور کی ضرب چلیپا سے مقطعات موافق ہر مساوات کے بغیر لحاظ علامت حاصل کرو یعنی اول اور سوم سے

۳ × ۲ − ۴ × (−۵) = ۲۶ اور اول اور سوم سے ۲ × ۲ − ۴ (−۳) = ۱۶ اور

اخر کار اول اور دوم سی ۳ × (−۳) − ۲ × (−۵) = ۱ اب مضاریب فیہ ۲۶ و ۱۶ و ۱

کی مناسب علامتین معین کرو اونکو امثال کی سطر عمودی مین لکھو اور چونکہ حاصل جمع ازروی حسب مقابلہ کے حاصل ضرب ۵۲ و ۴۸ و ۴ کا ایسی علامتون سی موثر ہونا چاہیئے کہ وہ برابر صفر کے ہو سکتے اول حاصل ضرب ۵۲ مثبت ہو تو باقی دو امثال ۴۸ و ۴ منفی ہونی چاہیئے یا اسکے بالعکس ہو

اب مساواتون کو نظم مضاریب فیہم − ۲۶ اور ۱۶ اور ۱ مین ضرب دو اور اونکو جمع کرو تو امثال لا اور ر کے معدوم ہو جائینگے اور ما حصل یہہ ہوگا کہ

۳۵ ی = ۳۵
ی = ۱

لا اور ی کے ساقط کرنیکے واسطے ضرب چلیپا سے اول اور تیسرے عمودی سطروں سے بغیر لحاظ علامت کے اعداد ذیل مضاریب فیہ حاصل ہوتے ہین یعنی ۳۵ و ۱۰ و ۵ اور اون سے چھوٹے اعداد اونکے متناسب ۵ و ۲ و ۱ قائم مقام ہو سکتے ہین

اگر انکو اول عمودی سطر مین لگائین تو یہہ ظاہر ہوگا کہ اول مضروب فیہ کو منفی اور باقی دو کو مثبت بنائین اسواسطے مضروب فیہون کا نظم − ۵ و ۲ و ۱ ہی اور جب انکو کام مین لائین تو مستحصلہ مساواتون کو جمع کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

۷ ر = ۱۴
ر = ۲

اسیطرح ر اور ی کو ساقط کرین تو − ۱ و ۱ و ۱ نظم مضروب فیہون کا حاصل ہوگا اگر او سکو

کام مین لائین تو ماحصل یہہ ہوگا کہ

۵ لا = ۱۵
لا = ۳   جواب لا = ۳
                        ک = ۲
                        ی = ۱

مضاریب فیہ ساقط کرنیوالی جدول ذیل مین لکھی ہین

لا	ک	ی
۱−	۵−	۲۶−
۱	۲	۱۶
۱	۱	۱

(۲) ان مساواتون کو حل کرو

۴لا − ۳ک + ی + ۱۷ = ۰
۹لا + ۷ک − ۵ی + ۳۴ = ۰
۱۱لا − ۲ک + ۷ی − ۸ = ۰

یہہ جدول مضاریب فیہ ساقط کرنی والون کی ہین

لا	ک	ی
۳۹	۱۱۸−	۱۹
۱۹	۱۷	۵
۸	۲۹	۱۱−

جواب لا = ۳−
ک = ۴
ی = ۷

(۳) ان مساواتونکو حل کرو

$\frac{۱}{لا} + \frac{۱}{ک} + \frac{۱}{ی} = ۱$

$\frac{۱}{۲لا} + \frac{۱}{۴ک} + \frac{۲}{ی} = ۱$

$\frac{۵}{۳لا} + \frac{۳}{۲ک} - \frac{۱}{۳ی} = ۱$

یہہ مساواتین آسانی سی حل ہوجاتی ہین اسواسطے ۱/لا اور ۱/ک اور ۱/ی کے متنافیون کے واسطے حروف یو مو وی لکھو اور کسورسے مساواتون کو صاف کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

لو + مو + ی = ۱
۲لو + ۰مو + ۱۶ی = ۴
۲۰لو + ۹۰مو − ۶ی = ۱۲

یہہ جدول مضاریب فیہ انتقاط کے ہونگے

لو	مو	می
−۱۰۰	−۱۶۶	۲
۱	۱۳	−۱۱
۱	۷	۱

جواب لا = ۲
ى = ۳
ی = ۶

امثلہ مشق ۴۴م

(۱) ۲لا + ۳ى + ۴ی = ۲۰
۴لا − ۳ى − ۲ی = −۱
۳لا + ۴ى + ۵ی = +۲۶

(۲) لا − ى + ی = ۳
لا + ى − ی = ۵
−لا + ى + ی = ۱

(۳) ۱/لا − ۱/ى + ۱/ی = ۱ ۵/۶
۲/۳لا − ۳/ى + ۴/۳ی = ۳ ۱۷/۱۸
۲/لا + ۴/ى − ۱/۲ی = ۲۰/۲۱

(۴) ۵لا + ۶ى + ۷ی + ۱۴ = ۰
۷لا + ۶ى + ۵ی + ۱۰ = ۰
۶لا + ۷ى + ۵ی + ۷ = ۰

(۵) −۲لا + ى + ی = −۱۰
لا − ۲ى − ۲ی = ۱۰
−لا + ى − ی = −۱

(۶) ۲(لا + ۱) − ۳(ى − ۱) + (ی − ۲) = ۲
۲(لا − ۱) + ۴(ى + ۱) − ۵(ی − ۱) = ۳
۳(۲لا + ۲) − ۲(ى − ۱) + ۳(ی + ۱) = ۲۹

(۷) ۲لا + ۳(ى − ۱) − ۴ی = ۱۸
۳(لا + ۱) − ۵ى + ۶ی = −۴۲
۵لا + ۴(ى + ۳) − ۵(ی + ۱) = ۲۹

(۸) ۱/۲لا − ۳/ى + ۴/ی = ۳۳/۱۰
۱/لا + ۱/ى − ۱/ی = −۳۷/۶۰
۵/لا − ۲/ى + ۳/ی = ۱۹۱/۶۰

(۹) لا + ى − ی = ۱۳۲۰
لا − ى + ی = ۶۵۴
−لا + ى + ی = −۱۲

(۱۰) لا + ى + ی = ۵
۳لا − ۵ى + ۷ی = ۷۵
۹لا − ۱۱ی + ۱۰ = ۰

(۱۱) ۳لا − ۵ى + ۴ی = ۵
۷لا + ۲ى − ۳ی = ۲
۴لا + ۳ى − ی = ۷

(۱۲) ۱/۲لا − ۲ ۳/۴ى + ۴ ۵/۶ی = ۳۱ ۲۵/۱۴۴
۶ ۷/۸ى − ۸ ۹/۱۰ی + ۶۱ ۴۴۳/۴۸۰ = ۰
۱۱لا + ۲ى = ۰

(۱۳) لا − ى + ی = ۶
۳ ۱/۲لا − ۴ ۳/۴ى + ۵ ۱/۲ی = ۳۲
۱۰ ۱/۲لا − ۹ ۱/۲ى + ۱۱ی = ۱۷

(۱۴) لا + ى + ی = ۶
لا − ى + ی = ۲
لا + ى − ی = ۰

(۱۵) ۲لا + ۳د − ی = ۹
۴لا − ۲د + ی = ۵
−۵لا + ۵د + ۴ی = ۴

(۱۶) ۳ ۱/۳ لا + ۵ ۱/۲ د − ۱ ۱/۱۱ ی = ۵۱
۲ ۱/۴ لا + ۳ ۱/۳ د − ۱ ۱/۲ ی = ۲۳ ۳/۴
۱ ۱/۲ لا + ۲ ۱/۷ د + ۳ ۳/۴ ی = ۳۱ ۱/۱۴

معادلات جنمین متعدد مقادیر مجہول ہون

اگر ن مساواتین ن مقادیر مجہول کی ہون تو مفروضہ مساواتون مین کسی ایک مقدار مجہول کی ساقط کرنے سے ن − ۱ مساواتین ن − ۱ مقادیر مجہول کی حاصل کر سکتی ہین اگر مساواتین تمام اول درجہ کی ہون تو ضرب چلیپاسی دو دو مجہول ایک ہی دفعہ عمل کرنے سے موافق دفعہ گذشتہ کی ساقط کرلو اسطرح حل بہت جلد ہو جائیگا اور ن مقادیر مجہول کی مساواتون سے ن − ۲ مساواتین ن − ۲ مقادیر مجہول کی کوئی سے مفروضہ مساواتون مین سے دو کو باقی مساواتون کے ساتھہ ترکیب دینے سے حاصل ہو سکتی ہین

مثالین

مساواتین
۲لا − ۳د + ۴ی − لو = ۴
۴لا + ۲د − ی + ۲لو = ۱۳
لا − د + ۲ی − ۳لو = −۷
۳لا + ۲د − ی + ۴لو = ۲۰

اول دو مساواتون کو تیسری مساوات کی ساتھہ ترکیب دو اور ی اور لو کو ساقط کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

۴۵لا + ۱۶د = ۷۷

پھر اول دو کو چوتھی مساوات کی ساتھہ ترکیب دو اور ایک ہی حروف کو ساقط کرو تو تمکو یہہ حاصل ہوگا

۴۳لا + ۱۰د = ۶۳

ان مساواتون سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ
لا = ۱
د = ۲

ان قیمتون کو اول دو مفروضہ مساواتون مین رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ
۴ی − لو = ۸
ی − ۲لو = ۵

اسے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ
ی = ۳
لو = ۴

جواب لا = ۱ ، د = ۲ ، ی = ۳ ، د = ۴

امثلہ مشق ۴۵

(۱) لا + ۲ک + ۳ی + ۴لو = ۲۰
لا + ۲ک + ۳ی − ۴لو = ۱۲
لا + ۲ک − ۳ی + ۴لو = ۸
لا − ۲ک + ۳ی + ۴لو = ۸
−لا + ۲ک + ۳ی + ۴لو = ۱۲

(۲) ۳لا + ک − ی + ۲لو = ۰
−۲لا + ۳ک + ی − ۴لو = ۲۱
لا − ک + ۲ی − ۳لو = ۹
۴لا + ۲ک − ۳ی + لو = ۱۲

(۳) لا/۳ + ک/۵ + ی/۷ + لو/۹ = ۲۸۰۰
لا/۵ + ک/۷ + ی/۹ + لو/۱۱ = ۲۱۴۴
لا/۷ + ک/۹ + ی/۱۱ + لو/۱۳ = ۱۷۴۴
لا/۹ + ک/۱۱ + ی/۱۳ + لو/۱۵ = ۱۴۷۲

(۴) لا/۳ + ک/۵ + ی/۷ + لو/۲ = ۹۱۰
لا/۵ − ک/۲ + ی/۷ − لو/۳ = −۵۵۳
لا/۷ + ک/۳ − لا/۵ − لو/۲ = −۳۴۴
لا/۲ − ک/۷ + ی/۳ + لو/۵ = ۶۱۳

اگر کسی نظم میں مقادیر مجہول کی تعداد سے مساواتیں زیادہ ہوں اور بعد عمل اسقاط کی سب کو ایک سے زیادہ مساواتیں ایک ہی مقدار مجہول کی حاصل ہوں تو اگر اون سے ایک ہی مقدار مجہول کی مختلف قیمتیں نکلیں تو جاننا چاہئے کہ وہ مساواتیں متخالف ہیں اور اگر اون سے ایک قیمت نکلے تو یہہ سمجھنا چاہئے کہ مساواتیں باہم بے لگاؤ نہیں بلکہ بعض اونمیں سے اور ہی مساواتوں کی ترکیب سے پیدا ہوگئی ہیں

مساواتیں جو اول درجہ کی مساوات کی طرف تحویل ہوسکتی ہیں

بعض صورتوں میں مساواتیں ذو مقدار مجہول کی ایسی بہی واقع ہوتی ہیں کہ اگر اونمیں ایک یا دو نو مقادیر مجہول درجہ دوم کی ہوں تو بہی اونکی تحویل اول درجہ کی مساواتوں کی طرف ہو سکتی ہی ہم ایسی صورتوں پر ایک بحث عام لکھینگے اور ہر ایک کی مثال دینگے

صورت اول

فرض کرو کہ مساواتیں اس صورت کی ہوں کہ

ا لا^2 + ب لا ک + ح ک^2 = ط
اَ لا^2 + بَ لا ک + حَ ک^2 = طَ

اور اونمیں یہہ ارتباط فرض کرو

ا : اَ :: ح : حَ :: م : ن

اول مساوات کو ن میں اور دوسری مساوات کو م میں ضرب دو اور تفریق کرو

(ن ب − م بَ) لا ک = ن ط − م طَ

اس مساوات سے قیمت لا ک کی معلوم ہوتی ہی اور اس سبب سے قیمت ا لا^2 + ب ک^2 کی دریافت ہوگی

پس مساواتون کی تحویل اس صورت کی طرف ہوگی

م لا + لا ی = ع

م لا + لا ی = ع

اور یہہ مساواتین درجہ اول کی ہین

مثال

۸ لا² − ۲۲ لا ی + ۱۵ ی² = ۵

۲ لا − ۳ ی = ۱ حل کرو

تقسیم کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

اب بفرضہ مساواتون سے دوسری مساوات ۴ لا − ۵ ی = ۵ کے ساتھہ اس مساوات کو ترکیب دو یہہ جواب حاصل ہوگا

لا = ۵

ی = ۳

صورت سوم

فرض کرو کہ مساواتین اس شکل کی ہون

ا لا² + ب لا ی + ح ی² = ط

م لا + ن ی = ع

اول مساوات کی دائین طرف کا رکن نہ تو کامل مربع ہو اور نہ دوسری مساوات کے دائین طرف کے رکن پر موافق صورت سابق کے تقسیم ہو تو تحویل اسطرح ہوگی کہ اول مساوات کو کسی مضروب فیہ اختیاری سہ مین ضرب دو اور اوسپر دوسری مساوات کا مربع جمع کرو تو

(ا سہ + م²) لا² + (ب سہ + ۲ م ن) لا ی + (ح سہ + ن²) ی² = ط سہ + ع²

اب بائین طرف کا رکن مربع کامل ہو اسلئے ضروری ہی کہ لا ی کے امثال کا مربع برابر چہند حاصل ضرب امثال لا² اور ی² کا ہو اسواسطے

(ب سہ + ۲ م ن)² = ۴ (ا سہ + م²) (ح سہ + ن²)

اسلئے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

سہ = ۴ (ا ن² − ب م ن + ح م²) / (ب² − ۴ ا ح)

اب اس قیمت کو مساوات مین رکہو اور طرفین مساوات کا جذر المربع لو دوسری مساوات اس صورت

کی حاصل ہوگی $م لا + ن ی = ع$

مثال

$لا^۲ - ۲ لا ی + ۳ ی^۲ = ۹$

$لا - ی = ۴$

اول مساوات کو ا مین ضرب دو اور دوسری مساوات کا مربع کرو اور دونو ماحصل کو جمع کرو تو

$(ا + ۴) لا^۲ - ۲ (ا + ۲) لا ی + (۳ ا + ۱) ی^۲ = ۹ ا + ۱۶$

اب دائین طرف کا رکن ایک مجذور کامل ہو اسلئے ضرور ہے کہ

$(ا + ۲)^۲ = (ا + ۴)(۳ ا + ۱)$

اسواسطے $ا = -\frac{۹}{۲}$

اس ا کی قیمت کو مندرج کرو اور اسکی یہہ معنی ہین کہ مفروضہ مساواتون مین سے اول مساوات کو ۹ مین اور دوسری مساوات کی مربع کو ۲ مین ضرب دین اور تفریق کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$۹ لا^۲ - ۱۸ لا ی + ۲۷ ی^۲ = ۸۱$

$۸ لا^۲ - ۸ لا ی + ۲ ی^۲ = ۳۲$

$لا^۲ - ۱۰ لا ی + ۲۵ ی^۲ = ۴۹$

اب دائین طرف کا رکن اس مساوات کا ایک مربع کامل ہے اسواسطے جذر نکالنے سے اور ماحصل کو دوسری مساوات کے ساتھ ترکیب دینی سی یہہ مساواتین حاصل ہوتی ہین

$لا - ۵ ی = \pm ۷$

$۳ لا - ی = لا$

جواب $لا = \frac{۱۳}{۹}$ اور $لا = ۳$

$ی = \frac{۱۰}{۹}$ اور $ی = ۱$

صورت چہارم

فرض کرو کہ مساواتین اس صورت کی ہون کہ

$ا لا^۲ + ب لا ی + ح ی^۲ = ط$

$اَ لا^۲ + بَ لا ی + حَ ی^۲ = طَ$

اگر دائین طرف کے ارکان کا ع لا + ق ی ہو وفق مشترک ہو تو مساواتین اس صورت کی ہونگین

$(ع لا + ق ی)(م لا + ن ی) = ط$

$(ع لا + ق ی)(مَ لا + نَ ی) = طَ$

اسواسطے تقسیم کرنے سے $\frac{م لا + ن ی}{م' لا + ن' ی} = \frac{ط}{ط'}$

اور اسکی تحویل کرنیسے یہہ حاصل ہوتاہی کہ

$$(ط' م - ط م') لا + (ط' ن - ط ن') ی = ۰$$

اب یہہ مساوات درجہ اول کی ہی اب اسکو مفروضہ مساواتون مین ایکسے ساتھہ ترکیب دین تو ایک دوسری مساوات درجہ اول کی حاصل ہوگی

مثال

ان مساواتون $۳ لا^۲ - ۵ لا ی - ۲ ی^۲ = ۱۷$ کو حل کرو

$$لا^۲ + لا ی - ۶ ی^۲ = ۱۱$$

ان جملون کا وفق مشترک (لا - ۲ی) ہی اب دائین طرف کے ہر رکن کو اسپر تقسیم کرو تو مساوات مستحصلہ یہہ حاصل ہوگی کہ

$$\frac{۳ لا + ی}{لا + ۳ ی} = \frac{۱۷}{۱۱}$$

اسسے یہہ حاصل ہوتاہی کہ

$$۲ لا - ۵ ی = ۰$$

اسواسطے $لا = \frac{۵ ی}{۲}$

دوسری مساوات مین اس قیمت کو مندرج کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتاہے کہ

$$\frac{۲۵}{۴} ی^۲ + \frac{۵}{۲} ی^۲ - ۶ ی^۲ = ۱۱$$

اسواسطے $ی^۲ = ۴$

$$ی = \pm ۲$$

اب اسکو مساوات $۲ لا - ۵ ی = ۰$ کے ساتھہ ترکیب دینے سے ہمکو $لا = \pm ۵$ کے حاصل ہوتاہی پس جواب $لا = \pm ۵$ و $ی = \pm ۲$ ہوا

صورت پنجم

فرض کرو کہ مساواتین یہہ ہون کہ

$$ا لا^۲ + ب لا ی + ح ی^۲ + د لا + ر ی + س = ۰$$

$م لا + ن ی + ع$

اب اگر ان جملون مین سی اول جملہ دوسرے جملہ پر پورا پورا تقسیم ہوسکے تو خارج قسمت $م' لا + ن' ی + ع'$ نکلیگا اسواسطے فقط تقسیم سے ہمکو ایک دوسری مساوات درجہ اول کی یہہ حاصل ہوجائیگی کہ

$$م' لا + ن' ی + ع' = ۰$$

مثال

ان مساواتون ۲ لا۲ + ۵ لا ی — ۱۲ ی۲ — ۳۰ لا + ۳۴ ی + ۵۲ = ۰

اول مساوات کو لا + ۴ ی — ۱۳ پر تقسیم کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ ۲ لا — ۳ ی — ۴ = ۰

اسکو لا + ۴ ی — ۱۳ = ۰ کی ترکیب دو تو لا اور ی کی یہہ قیمتین حاصل ہونگین کہ لا = ۳ اور ی = ۲

صورت ششم

فرض کرو کہ مساواتین اس شکل کی ہون کہ

ا لا ی + ب لا + ج ی = ۰

اَ لا ی + بَ لا + جَ ی = ۰

ہر یک مساوات کو حاصل ضرب لا ی پر تقسیم کرو اور لا اور ی کے متکافیون ۱/لا اور ۱/ی کی واسطے لو اور مو مندرج کرو تو دو مساواتین درجہ اول کی لو اور مو مین حاصل ہونگین

یعنی ا + ب مو + ج لو = ۰

اَ + بَ مو + جَ لو = ۰

مثال

ان مساواتون ۵۶ لا ی = ۷ لا — ۴ ی

۱۱۱ لا ی = ۵ لا + ۸ ی کو حل کرو

لا ی پر تقسیم کرو اور متکافیات ۱/لا اور ۱/ی کے واسطے لو اور مو لکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

مو — ۴ لو = ۵۶

۵ مو + ۸ لو = ۱۱۱

اسّے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ لو = ۷ اور مو = ۱۱ جواب لا = ۱/۷ ، ی = ۱/۱۱

صورت ہفتم

فرض کرو کہ مساواتین اس شکل کی ہون کہ

ا لا ی + ب لا + ج ی = د

اَ لا ی + بَ لا + جَ ی = دَ

اگر لا یا ی کے امثال ان مساواتون مین حد اکگانہ برابر صفر کے ہون تو انکی تحویل دو اور اول درجہ کی مساواتون کی طرف اسطرح ہو جائیگی کہ انکو لا یا ی پر جیسا کہ اقتضا ہے تقسیم کرنا اور متکافی کی واسطے کو مندرج کرنا۔

مثال

ان مساواتون ۳ لا ی + ۱۱ ی = ۴

ی پر تقسیم کرو اور ی کے مثانی کے جگہہ لو مندرج کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

۴ لو − ۳ لا = ۱۱

۵ لو − ۸ لا = ۱

اسے لا اور لو کی قیمتین ۳ اور ۵ جداگانہ حاصل ہونگین اور یہہ جواب ہوگا کہ لا = ۳ اور ی = $\frac{۱}{۵}$

صورت ہشتم

فرض کرو کہ مساواتین ان شکلون کی ہون کہ

ا لا ی + ب لا + ج ی = د

ی پر تقسیم کرو اور $\frac{۱}{ی}$ کی جگہہ لو کو مندرج کرو تو یہہ مساواتین حاصل ہونگین کہ

د لو − ا لا = ب ع + ج

لو لا = ع

اسے موافق سابق کے مساواتین درجہ اول لو اور لا کی دریافت ہوسکتی ہین

مثال

ان مساواتون لا ی = ۴ ی − ۱ کو حل کرو

ی پر تقسیم کرو اور $\frac{۱}{ی}$ کی جگہہ لو رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

لا + لو = ۴

لا لو = ۴

اول مساوات کا مربع کرو اور دوسری مساوات کے چوچند کو تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

لا − لو = ۰

اسواسطے لا = لو = ۲ جواب لا = ۲ اور ی = $\frac{۱}{۲}$

تین مساواتین جنمین تین تعداد مجہول ملتف ہون اور بعض اونمین سے درجہ دوم کی ہون اونکو خاص صورتین تحویل اول درجہ کی ہمزاد مساواتونکی طرف ہوسکتی ہین اس بات کی توضیح اور تشریح مثالون سے کرتے ہین

مثالین

ان مساواتونکو لا + ۲ د + ۳ ی = ۴ کو حل کرو

۲ لا د + ۳ لا ی = ۱۳

د ی = ۶

دوسری مساوات کو اس طرح لکھہ سکتی ہین کہ

لا (۲ د + ۳ ی) = ۱۳

اگر ہم ۲ د + ۳ ی = لو فرض کرین تو اول دو مساواتین اس شکل کی ہوجائنگی کہ

(لا − لو)^{2} = ۱۴۴

لا − لو = ± ۱۲

اول مثال مین علامت نفی کا استعمال کرو اور مساوات لا − لو = −۱۲ کو لا + لو = ۱۴ کے ساتھ شامل کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ لا = ۱ اور لو = ۱۳ اول مساوات مین لا کی قیمت مندرج کرو اور حاصل کو تیسری مساوات کے ساتھہ شامل کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

۲ د + ۳ ی = ۱۳

د ی = ۶

اول مساوات کا مربع کیا اور مربع مین سے ۲۴ گنا دوسری مساوات کا تفریق کیا اور جذر لیا تو یہہ حاصل ہوا کہ

۲ د − ۳ ی = ± ۵

اب یہان پہر علامت نفی کو منتخب کرین تو یہہ دو مساواتین درجہ اول د اور ی کی حاصل ہونگین یعنی

۲ د − ۳ ی = − ۵

۲ د + ۳ ی = ۱۳

اسے ظاہر ہوتا ہے کہ د = ۲ اور ی = ۳

اگر ہم مثبت علامت لین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

د = ۹/۲ اور ی = ۴/۳

جواب لا = ۱ و د = ۲ و ی = ۳

لا = ۱ و د = ۹/۲ و ی = ۴/۳

اگر اول صورت ± مین ہم + منتخب کرتے تو ایک ناممکن صورت واقع ہوتی یعنی

(۲ د − ۳ ی)^{2} = − ۱۴۴

اسواسطے ہم نی علامت + کو نہین اختیار کیا

(۲) ان مساواتون لا^{2} + ۴ د^{2} − د ی + ۳ ی^{2} = ۳۰

لا + ۲ د + ی = ۷

لا (۲ د + ی) = ۱۰ کو حل کرو

فرض کرو کہ ۲ د + ی = لو اور

لا + لو = ۷
لا لو = ۱۰

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ لا = ۲ اور لو = ۵ اول مساوات میں لا کی قیمت مندرج کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

۲ د² − د ی + ۳ ی² = ۲۶
۲ د + ی = ۵

اب یہہ مساوات موافق صورت سوم کے حل ہو سکتی ہیں صفحہ ۱۴۷ دیکھو دوسری مساوات کی مربع کا تینتیس ۳۳ گنا اول مساوات کے ۲۶ گنی سے تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

(۶ د − ۱۳ ی)² = ۱۰۸۹

اب جذر نکالنے سے اور علامت نفی اختیار کرنے سے

۶ د − ۱۳ ی = −۳۳
۲ د + ی = ۵

اسواسطے د = ۱ اور ی = ۳ اگر ہم مثبت علامت اختیار کریں تو

۶ د − ۱۳ ی = ۳۳
۲ د + ی = ۵

اسواسطے د = ۴۹/۱۶ اور ی = −۹/۸

جواب لا = ۲ و د = ۱ و ی = ۳
لا = ۲ و د = ۴۹/۱۶ و ی = −۱۸/۱۶

(۳) ان مساواتوں لا² + د² + ی² = ۶۱
لا د + لا ی = ۳۶ کو حل کرو
د ی = ۱۸

اول مساوات پر دو چند مجموعہ دوم و سوم کا زیادہ کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

لا² + د² + ی² + ۲ لا د + ۲ لا ی + ۲ د ی = ۱۶۹

ہر یک طرف کا جذر نکالو تو یہہ حاصل ہوگا

لا + د + ی = ۱۳

اس مساوات اور مفروضہ مساواتوں میں سے دوسری مساوات سے اگر د + ی = لو کی فرض کر لیا

لو + لا = ۱۳
لو لا = ۳۶

اول کا مجذور کیا اور دوسری کو چو چند کیا اور دونو حاصلوں کو تفریق کیا تو یہہ حاصل ہوا کہ

لو − لا = ۵

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ لو = ۹ اور لا = ۴ لیکن د + ی = لو تو

د + ی = ۹
د ی = ۱۸

اسسے معلوم ہوتا ہے کہ ر = ۳ اور ی = ۶ جواب لا = ۴ و ر = ۳ و ی = ۶

(۴) ان مساواتون لا² + ر² + ی² = ۱۱۰
لا + ر + ی = ۱۸
ری = ۳۰

تیسری مساوات کے دو چند کو اول مساوات پر زیادہ کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ
لا² + (ر + ی)² = ۱۷۰
فرض کرو کہ ر + ی = بو تو یہہ حاصل ہوگا کہ
بو² + لا² = ۱۷۰

دوسرے کا مربع کیا اور بو + لا = اول کو تفریق کیا تو
اول سے اسکو تفریق کیا اور جذر لیا تو بو لا = ۱۵۴
بو − لا = ۴
لیکن
بو + لا = ۱۸
اسواسطے لا = ۷ اور بو = ۱۱ اور چونکہ بو = ر + ی تو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ
ر + ی = ۱۱
ری = ۳۰
جسسے معلوم ہوتا ہے کہ ر = ۶ اور ی = ۵

جواب لا = ۷ و ر = ۶ و ی = ۵

(۵) ان مساواتونکو ری = ا²
ی لا = ب²
لا ر = ج² حل کرو

مساواتونکو باہمین ضرب دینے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ
ر² ی² لا² = ا² ب² ج²
اسواسطے
ری لا = ا ب ج
اسکو مفروضہ مساواتون مین سے ہر ایک کے ساتھہ ترکیب دینے سے ہمکو یہہ جواب حاصل ہوتا ہے کہ
لا = ب ج / ا اور ر = ج ا / ب اور ی = ا ب / ج

امثلہ مشق ۴۶

(۱) لا² − ر² = ۴۰
لا + ر = ۲۰

(۲) لا² − ر² = ۱۰۳
لا − ر = ۳

سوالات

دو یا زیادہ مجہول کی مساواتون کی استعانت سی جو سوالات حل ہوتے ہین اونکی مثالین لکہی جاتی ہین سوالات جو آگے لکہے جاتے ہین اونسے اس امر کی توضیح ہوتی ہی کہ کس طرح سوالات اول درجہ کے مساوات کے دو یا زیادہ مقادیر مجہول کی مساواتون کے ذریعہ سی حل ہوتی ہین

مثالین

(۱) ایک آدمی نی اپنا قرض ۲۰ پونڈ ۷ شلنگ ۶ پنس کا ۳۰ سکون مین ادا کیا اور اوسمین سورن اور ہاف کرون تہی تو بتاؤ ہر ایک سکے کی تعداد کیا تہی

فرض کرو کہ سورن کی تعداد = لا اور ہاف کرون = ی تو اس سبب سے کہ کل تعداد سکون کی ۳۰ تہی لا + ی = ۳۰

اور اگر قرض کی نقدی کی شلنگ بنائین تو ۴۰۷½ حاصل ہونگے اسلئے

۲۰ لا + ۲½ ی = ۴۰۷½

یا ۴۰ لا + ۵ ی = ۸۱۵

اس مساوات کو اول مساوات کی ساتہہ ترکیب دو تو لا = ۱۹ اور ی = ۱۱ حاصل ہوگا اسلئے جواب ۱۹ سورن اور ۱۱ ہاف کرون ہوا

(۲) ایک عدد دو ہندسون کا ہی جنکا مجموعہ ۱۰ ہے اور اگر ۳۶ اوسپر زیادہ کرین تو ہندسے مقلوب یعنی الٹی ہوجاتی ہین اوس عدد کو دریافت کرو

فرض کرو کہ اول ہندسہ لا اور دوسرا ہندسہ ی ہی تو بموجب اول شرط کے

لا + ی = ۱۰

اور بموجب دوسری شرط کی ۱۰ لا + ی + ۳۶ = ۱۰ ی + لا

اسسے یہہ معلوم ہوتا کہ ی − لا = ۴

ان دو مساواتون سی یہہ حاصل ہوتا ہے کہ لا = ۳ اور ی = ۷ جواب ۳۷

(۳) ایک عدد مین تین ہندسے ہین اطراف کے ہندسون کا مجموعہ اٹھ گنا بیچ کے ہندسہ کے ہے اور خود عدد ہندسون کے ۴۴ گنی مجموعہ سے بقدر ۸ کے زیادہ ہی اور اٹھ ہندسہ کا دو چند اول ہندسہ پر زیادہ کیا گیا سہ چند رقم متوسط سی اوس عدد کو دریافت کرو

اول اور آخر شرطون سے

لا − د + ی = ۸
لا − ۳د + ۲ی = ۰

اور دوسری شرط کے موافق

۱۰۰ لا + ۱۰ د + ی
۴۴ لا + ۴۴ د + ۴۴ی
۵۶ لا − ۳۴ د − ۴۳ی = ۸

پس لا اور د اور ی ان مساواتون سے حاصل ہوتی ہین کہ

لا − د + ی = ۸
لا − ۳د + ۲ی = ۰
۵۶ لا − ۳۴د − ۴۳ی = ۸

اگر اس صورت مین بھی ترکیب مضروب فیہا اختیاری کی اختیار کرین تو اسطرح عمل ہوگا کہ اول مساوات کو م مین اور دوسری کو ن مین ضرب دین اور جمع کرین تو یہہ پیدا ہوگا کہ

(م + ن + ۵۶) لا − (م + ۳ن + ۳۴) د + (م + ۲ن − ۴۳) ی = ۸م + ۸

د اور ی کو ساقط کرکے اوسکی امثال کو برابر صفر کے لکھو تو دو مساواتین دو مجہول م اور ن کی یہہ حاصل ہونگین کہ

م + ۳ن + ۳۴ = ۰
م + ۲ن − ۴۳ = ۰

م اور ن کی قیمت دریافت کرنے کے واسطے دوسری مساوات کو اول مساوات مین سے تفریق کرو تو

ن + ۷۷ = ۰

اسواسطے ن = − ۷۷ اور اس قیمت کو دوسری مساوات مین مندرج کرنی سی م = ۱۹۷ حاصل ہوگا

فقط ہی ان قیمتون کو اوس مساوات مین کہ باقی رہی ہی

(م + ن + ۵۶) لا = ۸م + ۸

مین کام مین لائین تو لا = ۹ کے حاصل ہوگا

لا کی اس قیمت کو اول دو مساواتون مین مندرج کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

۳د − ۲ی = ۹
د − ی = ۱

اسے قیمتین د اور ی کی ۷ اور ۶ معلوم ہوتی ہین اسلئے جواب ۹۷۶ ہی

(۴) ایک سرمایہ اسقدر تہا کہ آٹھہ سال کے عرصہ مین سود مفرد کے حساب سے اوسکی نوبت ۴۸۶ روپیہ پہونچی اگر شرح سود کی فیصدی ایک روپیہ زیادہ ہوتی تو پانچ برس مین

۶۰۵۱ روپیہ ۴/۱ پر اوسکی نوبت پہونچتی تو بتاؤ شرح سود اور سرمایہ کیا ہی

فرض کرو کہ لا سرمایہ ہو اور ی شرح سود ہو تو بموجب شرط اول کے

لا + ۸ لا ی / ۱۰۰ = ۶۴۸۶

اور بموجب دوسری شرط کے

لا + ۵ لا (ی + ۱) / ۱۰۰ = ۶۰۵۱ ۱/۴

اگر ان مساواتونکی تحویل کرین تو اونکی یہہ صورت ہوگی کہ

۱۰۰ لا + ۸ لا ی = ۶۴۸۶۰۰

۱۰۵ لا + ۵ لا ی = ۶۰۵۱۲۵

چونکہ ان مساواتون مین حاصلضرب لا ی ملتف ہی اسلئے وہ درجہ دوم کی مساواتین ہینگی باوجود اسکے وہ اول درجہ کی مساواتون مین بموجب صورت ہفتم صفحہ ۱۴۳ کے حل ہوتی ہین

ہر مساوات کو لا پر تقسیم کرو اور لا کی متکافی کی جگہہ لو کو رکہو تو

۶۴۸۶۰۰ لو − ۸ ی = ۱۰۰

۶۰۵۱۲۵ لو − ۵ ی = ۱۰۵

جسسے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ لو = ۱/۴۲۰۰

ی = ۴ ۳/۴ جواب سرمایہ = ۴۲۰۰ روپیہ

شرح سود = ۴ ۳/۴

امثلہ مشق ۴۷

(۱) دو عدد ایسی دریافت کرو کہ مجموعہ اونکا ۱۳۰ ہو اور فرق اونکا ۴۳ ہو

(۲) دو عدد ایسی دریافت کرو کہ اول کا دوچند دوسری سے بقدر ۵ کے زیادہ ہو اور اگر دوسری کا دوچند اول پر زیادہ کیا جاے تو مجموعہ ۲۵ ہو

(۳) دو اعداد ایسی دریافت کرو کہ اونکا مجموعہ ۲۷ ہو اور اگر اول کا چوچند دوسرے کے چند پر زیادہ کیا جاے تو مجموعہ ۹۳ ہوگا

(۴) تین عدد ایسی دریافت کرو کہ اونکا مجموعہ ۲۳ ہو اور مجموعہ اول اور تیسرے کا دوسرے کے دوچند سے بقدر ایک کے بڑا ہو اور اول کا چارچند اور دوسرے کا پنچند اور تیسرے کا دوچند ملکر برابر ۶۹ کے ہو

(۵) تین عدد متساوی الفرق ایسی دریافت کرو کہ بیچ کے عدد کا چہہ گنا باقی دو کے مجموعے سے بقدر ۳ کے زیادہ ہو اور مجموعہ اول اور دوم کے دوچند اور سوم کے سہ چند کا برابر ۴۳ کی ہو

(۶) ایسی دو عدد معلوم کرو کہ اول کا دوچند اور دوم کا سہ چند ملکر برابر ۱۸ کی ہو اور دوم کا دوچند اول کے پچگنی سے تفریق کیا جاے تو ۲ باقی رہین

(۷) دو اعداد ایسی ہین کہ اونکا فرق ۳۰ سی بقدر ۸ کے چہوٹا ہی اور اونکا مجموعہ اسی عدد سے بقدر اونکی اوسط قیمت کے زیادہ ہی

(۸) ۹۸۵ کو ایسی دو حصون مین تقسیم کرو کہ ایک حصہ کے پانچوین حصہ پر دوسرے کا ساتوان حصہ زیادہ کرین تو ۹۹ کے برابر ہو اور دوسرے کا دوچند اول سی بقدر ۱۸ کے زیادہ ہو

(۹) کچھہ جمع نقدی کی پانچ آدمیون ا و ب و س و د و ی مین تقسیم ہوئی جمنین سے ب کو دس روپیہ کم ا سے اور س کو ۱۶ روپیہ زیادہ ب سی اور د کو ۵ روپیہ کم س سی اور ی کو ۱۵ روپیہ زیادہ د سے ملے اور د اور ی کے حصے ملکر کل مجموعہ سے آدہی ہین تو ہر ایک حصہ اور کل جمع دریافت کرو

(۱۰) تین عدد ایسی دریافت کرو کہ اول اور دوم کا مجموعہ ۱۵ ہو اور اول اور تیسری کا مجموعہ ۱۶ ہو اور دوم اور سوم کا مجموعہ ۱۷ ہو

(۱۱) ایسی تین اعداد دریافت کرو کہ اول اور دوم کا مجموعہ ۱۹ ہو اور اول اور سوم کا ۲۲۱ ہو اور دوم اور سوم کا ۲۵۵ ہو

(۱۲) ایک قرض ۷ پونڈ کا تہیلر اور پانچ فرینک کے سکون مین ادا کیا گیا تو بتاؤ کتنے سکے تہے جنکی تعداد ۴۱ تہی

(۲۰ تہیلر = ۳ پونڈ ۲۵ فرینک = ۱ پونڈ)

(۱۳) ایک غریب الوطن نے انگریز کا قرضہ ۵ پونڈ کا تہیلر اور فلورن اور فرینک مین ادا کیا اور ایک شلنگ پہیر لیا جب انگریز نے ان سکون کو گنا تو معلوم ہوا کہ تعداد فلورن کی تہیلر کی تعداد سے اتنی زیادہ تہی جتنی کہ وہ فرینک کی تعداد سی چہوٹی تہی اور کل تعداد سکون کی ۴۳ سکے تہے تو بتاؤ کتنے ہر ایک سکے پائی

(۱۲ فلورن = ۱ پونڈ)

(۱۴) ایک عدد تین ہندسون کا ہی اور اونکا مجموعہ ۹ ہی اور جو عدد کہ اول دو ہندسون سے بنا ہی اوسکا آٹہوان حصہ آخر ہندسہ ہی اور جو آخر دو ہندسون سے عدد بنا ہی اوسکا آٹہوان حصہ اول ہندسے سے ۱ ہی اوس عدد کو دریافت کرو

(۱۵) ایک گدہی اور خچر لوجہہ لدی ہوئی چلے گدہی نے خچر سے کہا کہ کیون بوجہہ سی مری جاتی

ایک من بوجھ اپنا مجھی دیدے تو میرا بوجھ تیری بوجھ سے دوگنا ہوجایگا خچر نی کہا کہ تو اپنا ایک من مجھے دیدے میرا تیرا بوجھ برابر ہوجایگا تو بتاؤ کہ ہر ایک پر کتنا بوجھ لدا ہوا تھا

(۱۶) ایک مزدور اس شرط سے ۳۰ دن کیلئے لگایا گیا کہ جس روز کام کریگا اوس روز ۱۰ پای پائیگا اور جس روز غیر حاضر رہیگا تو ۸ پای جرمانہ لیا جائیگا آخر روز اوسکو کل مزدوری کے ۱ روپیہ ۵ آنہ ۸ پائی ملے تو بتاؤ کتنے دن اوسنے کام کیا اور کتنے دنون غیر حاضر رہا

(۱۷) ایک کسان نے ۳۰ من بورہ چانول کے اور ۴۰ بورہ گیہوں کے ۱۶ روپیہ ۱۴ آنہ کو خریدے اور دوسرے کے ہاتھ اسی بہاؤ سے ۵۰ بورہ چانول کے اور ۳۰ بورہ گیہوں کے بیچے اور ۲۱ روپیہ ۴ آنہ اوسکو ہاتھ لگے تو بتاؤ کس بہاؤ سے چانول اور گیہوں بیچے

(۱۸) ایک لڑکے نے اپنے باپ سے پوچھا کہ کیا عمر ہی باپ نے جواب دیا کہ سات برس پہلی میری تیری عمر سے چوگنی تہی اگر ہم اور سات برس تک زندہ رہی تو میری عمر تیری عمر سی دوچند ہوگی بتاؤ باپ اور بیٹے کی عمرین کیا ہین

(۱۹) ایک امتحان مین ۱۷ امیدوار تہی جن مین سے بعض پاس ہوگئی بعض واپس بھیجے بعض بالکل ناکامیاب ہوئی اگر ایک ناکامیاب ہوتا اور ایک کم واپس ہوا ہوتا تو تعداد پاس شدہ کی دوچند واپس شدہ سے اور سہ چند ناکامیاب امیدوارون کی تعداد سی ہوتی ہی تو بتاؤ ہر قسم کے کتنے امیدوار تہے

(۲۰) ایک آدمی اپنے چار ملازمون مین دولت تقسیم ہونیکے لئے چھوڑ مرا اول خدمتگار کو نصف روپیہ باقی تین خدمتگارون کے حصون کے مجموعہ سے ملا اور دوسرے کو باقی تین کے حصون کی ایک تہائی اور تیسری کو باقی تین کے حصون کی مجموعہ کی چوتہائی ہین اول کو ۱۴ روپیہ بہ نسبت آخر ملازم کے زیادہ ملے تو بتاؤ ہر ایک کو کیا ملا

(۲۱) دو عددون مین نسبت ۳ : ۵ کی ہی اگر ۱۰ اول پر زیادہ کیا جای اور دوسرے سے تفریق کیا جای تو نسبت معکوس ہوجاتی ہی ان اعداد کو بتاؤ

(۲۲) دو عدد ہین ہر ایک مین تین ہندسی ہین اور اونکا مجموعہ ایک ہزار سی بقدر ایک کے کم ہے

اگر یہہ دو عدد علامت اعشاریہ سے اسطرح جدا کئے جائیں کہ پہلے اول ایک عدد لکہیں اور پہر دوسرے عدد کو اول لکہیں تو ماحصلوں میں نسبت ۱ : ۶ کی ہے اون اعداد کو دریافت کرو

(۳۳) تین عدد ایسے دریافت کرو کہ اول عدد کا نصف اور دوسرے عدد کی ایک تہائی اور تیسرے کی ایک چوتہائی ملکر برابر ۶۲ کے ہوں اور اول کی تہائی اور دوسرے کی چوتہائی اور تیسرے کا ایک پانچواں حصہ ملکر برابر ۴۷ کی ہو اور اول کی ایک چوتہائی اور دوسرے کا پانچواں حصہ اور تیسرے کا ایک چہٹا حصہ ملکر برابر ۳۸ کے ہو

(۳۴) ایک شخص پاس دو گیپے تہے ہر ایک میں کچہہ گہی بہرا ہوا تہا ایک کُپّے سے دوسرے کُپّے میں اسقدر گہی انڈیلا جتنا کہ اوسمیں پہلی سے تہا اور پہر دوسرے کُپّے سے پہلے کُپّے میں اتنا گہی الٹا جتنا کہ اوسمیں بہرا ہوا تہا اور پہر پہلے کُپّے سے دوسرے کُپّے میں اتنا گہی ڈالا جتنا کہ اوسمیں بالفعل گہی بہرا ہوا تہا اب ۸۰ ڈنری گہی ہر ایک کُپّے میں تہا تو بتاؤ اصل میں اونمیں کسقدر گہی تہا

(۳۵) مدرسہ میں تین لڑکے موہن سوہن رادہا جبر مقابلہ سیکہتے تہے وہ اپنی گولیوں کے باب میں اسطرح گفتگو کرنی لگی کہ موہن بولا کہ ہماری گولیوں کی تعداد کے مربعے ملکر برابر ۱۶۹ ہے ہیں اور سوہن کہنے لگا کہ میری اور رادہا کی گولیاں ملکر اوتنی گنی کیجائیں جتنی کہ تیری پاس گولیاں ہیں تو یہہ ۵ ہوں اور اگر فقط میری ہی گولیاں اوتنی گنی کیجائیں جتنی کہ گولیاں رادہا کی پاس ہیں تو ۱۸۰ ہوں تو بتاؤ ہر ایک کے پاس کتنی کتنی گولیاں تہیں

(۳۶) ۹۰ کو ایسے چار حصوں میں تقسیم کرو کہ اگر اول پر ۵ زیادہ اور دوسرے سے ۴ کم اور تیسرے کو ۳ میں ضرب اور چوتہی کو ۲ پر تقسیم کریں تو ماحصل ہر صورت میں ایک ہی ہو

(۳۷) چار عدد ایسے دریافت کرو کہ اول مع نصف دوم کی ۳۵۷ ہو اور دوم معہ تہائی سوم کی ۴۷۶ ہو اور سوم معہ ایک چوتہائی چہارم کی ۵۹۵ ہو اور چوتہا مع پانچویں حصہ اول کے برابر ۱۴۷ کے ہو

(۳۸) ۱۰۰ کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ اونکا حاصلضرب برابر ۲۱۰ کے ہو

(۲۹) ۱۰۰ کو ایسی دو حصون مین تقسیم کرو کہ اونکی مربعے ملکر برابر ۲۷۲ ½ اور اونکا حاصلضرب برابر ۱۲۸ ½ کے ہو

(۳۰) ۳۶۵ کو ایسی دو حصون مین تقسیم کرو کہ اونکی مربعون کا مجموعہ ۱۰۱۱۹ ہو

(۳۱) تین اعداد متناسب متوالیہ ہین اونکا مجموعہ ۳۸ ہے اور مجموعہ اونکے مربعون کا ۵۳۲ ہی اونکو دریافت کرو

(۳۲) ا نے ب سے کہا کہ اگر تم اپنے روپیہ کی تین چوتہائی دیدو تو میری پاس ۱۰۰ روپیہ ہوجائین ب نے کہا کہ مین نہین دونگا اگر تم اپنی آدہی روپیہ دیدو تو میری پاس ۱۰۰ روپیہ ہو جائین تو بتاؤ ا پاس کتنا روپیہ تہا اور ب پاس کتنا روپیہ

(۳۳) ایک کسر ایسی دریافت کرو کہ اوسکی شمارکنندہ اور نسب نما کا حاصلضرب ۱۸۰ ہو اور اگر شمارکنندہ اور نسب نما مین سے ہر ایک پر ۱ زیادہ کرین تو اوسکی قیمت دوچند ہو جاے

(۳۴) ایک کسر ایسی دریافت کرو کہ اوسکے شمارکنندہ کے تگنی پر نسب نما کی دوچند کو زیادہ کرین تو وہ برابر اونکی دوچند حاصل ضرب کے ہو اور اگر نسب نما اور شمارکنندہ مین سے ہر ایک پر ۱ زیادہ کرین تو کسر کی قیمت دوچند ہو جاے

(۳۵) ایک عدد دو ہندسون کا ہی جنکا مجموعہ ۱۲ ہی اب اگر ہندسون کو مقلوب بالترتیب کرکے عدد بنائین تو وہ پہلے عدد سے بقدر ۳۶ کے کم ہو اوس عدد کو دریافت کرو

(۳۶) دو مسافر سفر کو چلے ایک مسافر پاس ۱۰۰ روپیہ دوسرے مسافر کے پاس ۴۸ روپیہ تہی رستے مین چورون سے مٹ بہیڑ ہوئی اونہون نے پہلے مسافر سے دوچند بہ نسبت دوسرے مسافر کے روپیہ لیا اور اب اول مسافر پاس جو باقی رہا وہ دوسرے مسافر کے زر باقیماندہ سے سہ چند تہا تو بتاؤ ہر ایک مسافر کا کتنا روپیہ چوری گیا

(۳۷) ایک شخص کو ۱۸ روپیہ ۱۴ آنہ کا قرض اور دوسرے کو ۳۵ روپیہ ۱۰ آنہ کا قرض دینا تہا اور کوئی اونمین اپنے قرض کے ادا کرنے کے قابل نہ تہا پہلا دوسرے سے کہنے لگا کہ تم اپنے روپیہ کی ایک تہائی دیدو تو مین اپنی قرض کو بالکل ادا کردون دوسرے نے جواب دیا کہ اگر تم اپنے روپیہ کا پانچوان حصہ دیدو تو مین اپنا قرض بالکل ادا کردون تو بتاؤ ہر ایک پاس کتنا روپیہ تہا

(۳۸) ایک شخص نے اپنی نقدی کی جمع کو چہہ سال تک مفرد سود پر چلایا اور اوسکو بڑہا کر

۹۱۰ روپیہ کرلئے اگر پہلی جمع سی دو چند جمع سود پر تین برس تک چلا گئے ہوتی اور سود ایک روپیہ سیکڑہ کم لیا جاتا تو ۱۵۶۸ روپیہ ہوجاتے تو جمع اور شرح سود دریافت کرو

(۳۹) ایک شخص نے ۸۰۰۰ روپیہ قرض لیکر ۲۳۰۰۰ روپیہ قرض دئے اور اوس سے ۹۰۵ روپیہ ایک سال مین سود کے حاصل کرلئے اور پھر اسی شرح سود پر اوسنے ۹۴۰۰ روپیہ قرض لئے اور ۱۷۵۰۰ روپیہ قرض دئے اور اسطرح معاملہ کرنے سے ۵۳۹ روپیہ ۸ ر فائدہ کی حاصل ہوئے تو بتاؤ کس شرح سود پر وہ قرض لیتا ہی اور قرض دیتا ہی

(۴۰) ایک میوہ فروش کچھ رنگترے اور سیب ۱۹ ر ۶ پائی کو بیچتا ہی اور سیبون کی تعداد رنگترون کی تعداد سی بقدر ۱۸۰ کے زیادہ ہی اور سیب ۳ پائی کے پانچ پانچ بیچے اور ۱۵ رنگترون کے بیچنے مین اوسکو ۱½ پائی کا فائدہ زیادہ بنسبت ۳۵ سیبون کے بیچنے کی حاصل ہوا تو بتاؤ سیب اور رنگترے کتنے کتنے ہین اور رنگترون کی قیمت کیا ہے

(۴۱) دو ہنڈویان ہین ایک مین چھ مہینے کی میتی اور دوسری کی تین مہینے کی میتی ہے دونون کی کٹوتی ۴ روپیہ سیکڑہ کی ہوئی اور کٹوتی ایک ہنڈوی کی بہ نسبت دوسری ہنڈوی کے کٹوتی کی بقدر سو روپیہ کے زیادہ ہی اور کل ۲۹۴ روپیہ ۱۲ آنہ حاصل ہوئی ہین تو بتاؤ ہنڈویان کتنی کتنی روپیہ کے ہین

(۴۲) ایک بزاز نے تین قسم کے کپڑے خریدے وہ سب ملکر ۳۵ گز تھے ایک کپڑا ۹ گز اور دوسرا ۱۱ ر ۶ پائی گز اور تیسرا ۱۳ ر ۴ پائی گز خریدا اور کل ۱۸ روپیہ ۹ ر کا ہوا اور اوسنے سب سے مہنگے کپڑے کے واسطے ۱ روپیہ ۷ ر زیادہ بہ نسبت باقی دو کپڑون کی قیمت کے دیئے تو بتاؤ ہریک قسم کا کپڑا کتنا گز کتنا خریدا

(۴۳) ایک سوداگر نے قہوہ ۸۰ شلنگ فی ہنڈریڈویٹ کے حساب سے خریدا اور نقد قیمت فیصدی کٹوتی کٹوا کر دیئے کچھ قہوہ بگڑا ہوا تھا اوسکی قیمت ۵۰ شلنگ فی ہنڈریڈویٹ دیے اور کل قیمت کے ۱۰۲ پونڈ ۱۲ شلنگ دئیے اچھا قہوہ ۱۰ فیصدی اصل قیمت پر لیکر بیچا اور کٹوتی کو حساب مین نہین لگایا اور بگڑا قہوہ ۵ فیصدی نفع سے بیچا اور کل اسطرح بیچنے سے ۱۸ پونڈ ۱۰ شلنگ نفع حاصل کئی تو بتاؤ ہریک قسم کا قہوہ کتنا کتنا تھا

(۴۴) تین آدمی ا و ب و س جوا کہیلنے بیٹھے اور جب کہیل چکی تو یہہ معلوم ہوا کہ ہر ایک پاس روپیہ برابر ہے اور جب اونہوں نے کہیلنا شروع کیا تہا تو ا پاس ۱۵ روپیہ ۴ کم بہ نسبت ب اور س کے روپیوں کے تہی لیکن وہ ۲۶ روپیہ ۸ ہار گیا اور ب اور س نے ۲۳ روپیہ ۶ اور ۱۳ روپیہ ۲ جیتے تو بتاؤ ہر ایک شخص نے کتنے روپیہ سے کہیلنا شروع کیا تہا اور جس وقت کہیل چکے تو ہر ایک کی پاس کیا تہا

(۴۵) ایک مستطیل کہیت ایک ایکڑ رقبہ کا ہے اور اوسکا مجموعہ اضلاع ۴۴۳ گز ہے تو بتاؤ ہر ایک ضلع میں کتنے گز ہین

(۴۶) ایک کشتی ڈوور سے کیلکس مین دو گہنٹہ کے اندر پہونچتی ہی اور مراجعت کے وقت ہوا مخالف تہی تو وہ ۶ میل ایک گہنٹہ جانے کی چال سے کم چلی اور جب وہ آدہی دور چلی تہی تو ہوا بدلی اور چال چلنی کی ۳ میل بڑہ گئے اور اس چال کے بڑہ جانی سے ۶ : ۷ کے نسبت سی پہلے پہونچی چالین کشتی کی بتاؤ اور ڈوور اور کیلاس کے درمیان فاصلہ بتلاؤ

(۴۷) ایک صندوق کا قطر ۱۲۵ انچ کا ہی اور تختہ کا رقبہ ۴۵۰۰ مربع انچ کا ہی اور تین غیر متصل کناروں کا مجموعہ ۲۱۵ انچ ہے تو ان تین ضلعوں کا طول دریافت کرو

(۴۸) ایک ظرف تین مختلف دہانون سے پر ہوتا ہے اول اور دوم سے ۳۳ ۱/۳ منٹ مین اور اول اور تیسرے سے ۳۶ منٹ مین اور دوسرے اور تیسرے سے ۴۰ ۱/۱۱ منٹ مین تو بتاؤ ہر ایک دہانہ سے علیحدہ علیحدہ کتنی دیر مین پر ہوگا اور تینوں سے ملکر کتنی دیر مین پر ہوگا

(۴۹) تین امیدواروں مین سی ایک کے انتخاب کرنیکے واسطے ایک جلسہ منعقد ہوا اور یہہ شرط ٹہری کہ ہر شخص کے انتخاب کے واسطے نصف ارکان مجلس سے زیادہ ارکان کی رای ہو اونمین ایک امیدوار کے واسطے اجتماع راؤن کا نہ ہوا اگرچہ اوسکے حق مین ۲ رائین بہ نسبت دوسرے شخص کے زیادہ دی گئین لیکن فرض کرو کہ تیسرے شخص کے حق مین رائین دوسرے شخص کی راؤن کے تین دسوین کی برابر نہین وہ بدل جاتین اور اونمین سے ایک تہائی رای دینے والے پہلی شخص کے حق مین رای دیتی تو فقط پہلا ہی شخص منتخب ہوتا تو بتاؤ ہر ایک امیدوار کے حق مین کتنی رای دی گئین

(۵۰) ا نے ۵۰ بہیڑین ۱۲ گائین ۲۳۴۲ روپیہ کی خریدین ب نی بہی اسیقدر روپیہ کی ۹۶ بہیڑین ۱۰ گائین خریدین اور ۷ بہیڑ کی قیمت ۲۵ روپیہ فیصدی اور بیل کی قیمت ۲۰ فیصدی کم نسبت ا کے دیئے تو بتاؤ ان خریدنے والون نے کتنی بہیڑین اور کتنی گائین خریدین

(۵۱) ایک علم ۵۰۴ گز کے فاصلہ پر ایک جگہہ سے کہڑا ہوا تہا اس جگہہ سے اوس علم تک آنی جانی کی ا اور ب نے دوڑ کی ا پہرتی دفعہ ب سے ۲۰ گز کے فاصلہ پر علم سے ملا اور ملنی جگہہ پر ایک منٹ ۲۰ پیشتر ب سے پہونچا تو بتاؤ ہر ایک نے کتنا فاصلہ طے کیا

(۵۲) ایک کسر ایسی دریافت کرو کہ اگر اوسکی شمار کنندہ اور نسب نما مین سے ہر ایک پر ایک زیادہ کرین تو اوسکی قیمت $\frac{1}{2}$ ہوجائے اور اگر ایک کم کرین تو قیمت اوسکی $\frac{1}{3}$ ہوجائے

(۵۳) ایک لڑکے نے ڈیڑہ آنہ کے سیب اور بیر خریدے اور سیب ایک پائی کے چار چار اور بیر پائی کے پانچ پانچ اور دوسرے لڑکے کے ہاتہہ اسی بہاؤ سے ادہی سیب اور تہائی بیر بیچڈالے اور ۸ پائی قیمت مین لئے تو بتاؤ اوسنے کتنے سیب اور کتنے بیر خریدے

(۵۴) ایک شراب فروش پاس دو قسم کی شراب تہی اگر وہ ۹ بوتل خراب شراب مین ۷ بوتل اچہی شراب کی ملائی تو یہہ مرکب شراب ۱۳ر ۶ پائی فی بوتل کی بکجاتی ہے لیکن اگر وہ ۳ بوتل خراب شراب کی اور ۵ بوتل اچہی شراب کی ملائی تو وہ ۱۴ر ۶ پائی کی بوتل بکجاتی ہی تو ہر یک قسم کی شراب کی بوتل کی قیمت کیا کیا ہے

(۵۵) ایک سنار کے پاس دو قسم کی کہوٹی چاندی ہی اول قسم کے ۱۰ اونس اور دوسری قسم کی ۵ اونس ملاکر گلاتا ہی تو اس مرکب کہوٹی چاندی مین ۶۸۷½ فی ہل کہراپن ہوتا ہے اور اگر اول قسم کی ۴½ اونس اور دوسری قسم کی ۱½ اونس گلاتا ہی تو اس مرکب کہوٹی چاندی مین ۶۲۵ فی ہل کہراپن ہوتا ہی تو بتاؤ ہر یک قسم کی چاندی کا کہراپن کیا ہی

(۵۶) ایک جہاز دخانی دہار کے اوپر ۴۰ میل اور الٹے دہار پر ۴۸ میل ۸ گہنٹہ مین چلتا ہی اور ایک اور جگہہ ۵۶ میل دہار پر اور ۹۶ میل الٹی دہار پر ۱۳ گہنٹہ مین چلتا ہی ان ہندسون سے حساب لگاؤ

کہ دہار کی رفتار فی گہنٹہ کیا ہی اور دخانی جہاز کی چال ٹہری ہوئی پانی پر کیا ہے

(۵۷) تین قلعے ا اور ب اور س ایک مثلث کے کونون پر ہین ا سے س تک ب مین سی ہوکر فاصلہ ۸۲ میل ہے اور ب سے ا تک س مین ہوکر فاصلہ ۹۷ میل ہے اور س سے ب تک ا مین ہوکر ۸۹ میل فاصلہ ہے تو قلعون کے درمیان فاصلہ دریافت کرو

(۵۸) تین شخص ا اور ب اور س ایک بہاؤ سے بتفصیل ذیل چیزین خریدتے ہین کہ ا نے ۳ ½ پونڈ قہوہ اور ۷ پونڈ شکر اور ۲ ½ پونڈ چاہی ۱۸ شلنگ ۱ پنس کو خریدے اور ب نے ۵ پونڈ قہوہ اور ۹ ½ پونڈ شکر اور ۳ پونڈ چاے ۱ پونڈ ۳ شلنگ ۷ پنس کو خریدی اور س نے ۲ پونڈ قہوہ اور ۱۱ پونڈ شکر اور ۴ پونڈ چاے ۱ پونڈ ۲ شلنگ ۱۰ پنس کو خریدی تو قیمتین قہوہ اور شکر اور چاے کی فی پونڈ دریافت کرو

(۵۹) پانچ فرنک کے سکہ کا قطر ۳۷ ملی میٹر ہے اور دو فرنک کے سکہ کا قطر ۲۷ ملی میٹر ہے اور جب تیس سکون کو ایک خط مستقیم مین اسطرح رکہو کہ ایک سکہ دوسرے سکہ کو مس کرے تو اوسکا طول ایک میٹر ہی تو بتاؤ ہر ایک قسم کے سکے کتنے ہین

(۶۰) پانچ ٹوکرے ہین ہر ایک مین کچھہ سیب رکہے ہوئے ہین پہلے ایک ٹوکری مین سے اتنے سیب اوٹہائے کہ اونمین سے ہر ایک ٹوکری مین اتنے سیب ڈال دیئے جتنے کہ اوسمین پہلے سی تہے اور اسیطرح دوسرے ٹوکری مین سے اتنے سیب اوٹہا لئے کہ ہر ایک مین اوتنے سیب ڈال دیئے جتنے کہ ہر ایک ٹوکرے مین تہے اور اور ٹوکرون مین سے اسیطرح سیب اوٹہائے اور ڈالے اور اس ڈالنے اور اوٹہانے مین سب ٹوکرون کی گرد بالترتیب گیا اور ہر ایک ٹوکری مین اتنے سیب رکہا گیا جتنے کہ اوسمین موجود تہے آخرکار سب ٹوکرون مین سی ہر ایک مین ۳۲ سیب تہے تو بتاؤ ہر ٹوکری مین اصل مین کتنے سیب تہے

سوالات پر مباحثہ ومناقشہ

بعض عجیب اور بیقاعدہ نتایج سوالات مین واقع ہوتی ہین اون پر ہم مباحثہ اور مناقشہ لکہتی ہین

سوال

باپ اور بیٹی کی عمرین ا اور ب برس کی ہین تو وہ زمانہ بتاؤ کہ باپ کی عمر چند بیٹی کی عمر سی ہو

فرض کرو کہ جواب لا برس ہون تو

ا + لا = ۴ (ب + لا)

انتقال اور تقسیم سے لا = (ا − ۴ب) / ۳

اب اس سوال کی تین صورتین ہین جو ا اور ب کی قیمتون پر موقوف ہین

اول صورت ا > ۴ ب

دوسری صورت ا = ۴ ب

تیسری صورت ا < ۴ ب

اول صورت مین لا کی قیمت مثبت ہے تو اس سے معلوم ہوتا ہی کہ باپ کی عمر بیٹے کی عمر سے چوچند زمانہ آیندہ مین ہوگی مثلاً اگر باپ کی عمر ۵۴ برس کی اور بیٹے کی عمر ۹ برس کی ہو تو موجب حل کی ۶ سال بعد عمرین مطلوب ہونگین باپ ۶۰ برس کا اور بیٹا ۱۵ برس کا ہوگا اور اسے شرط مطلوب پوری ہوگی

دوسری صورت مین قیمت لا کی صفر ہے تو صاف معلوم ہوتا ہے کہ جواب سوال کا یہہ ہے کہ ابھی باپ بیٹون کی عمرین ایسی ہین

تیسری صورت مین لا کی قیمت منفی ہی اسسے معلوم ہوتا ہے کہ زمانہ آیندہ مین باپ کی عمر بیٹے کی عمر سے چوچند زمانہ آیندہ مین نہین ہوگی لیکن کسی زمانہ ماضی مین باپ کی عمر بیٹے کی عمر سے چوچند تھی یہہ بات نیچے کے سوال سے صاف ظاہر معلوم ہوتی ہی کہ

فرض کرو باپ کی عمر ۴۵ برس اور بیٹے کی عمر ۱۵ برس کی تو حل سوال کا یہہ ہے کہ لا = −۵ اسے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر ہم پچھلے زمانہ پر جائین اور آیندہ زمانہ کا خیال کرین تو وہ زمانہ ہمکو معلوم ہوتا ہی کہ جسمین باپ کی عمر بیٹے کی عمر سے چہار چند تھی یعنی جب باپ ۴۰ برس کا تھا بیٹا ۱۰ برس کا تھا

اس سوال مین نتیجہ منفی کا بیان خاطر خواہ ہوگیا زمانہ استقبال کی جگہہ زمانہ ماضی کا خیال کیا گیا یعنی زمانہ بدل دیا آگے سے پیچھے ہٹے یعنی سمت بدل دی

اب ہم فاصد کے مشہور سوال پر مباحثہ کرتے ہین اس سوال اور اور سوالون مین جنمین کہ حرکت

جنمین کہ حرکت متساوی ہو اونمین یہہ منظور ہی کہ مسافت اور وقت اور رفتار مین ارتباط قائم کرین اگر رفتار کا اندازہ اون طول فی پیمانہار واحد سے ہو جو وقت کے پیمانہ واحد سے اندازہ کئے جاتی ہین تو ظاہر ہے کہ کسی خاص وقت مین جسمین ایک ہی پیمانہ واحد سی اندازہ ہو کل مسافت برابر حاصل ضرب شرح رفتار یا رفتار اور وقت کی ہوگی یعنی

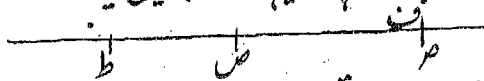
مسافت = رفتار × وقت

اسواسطے وقت = مسافت / رفتار

رفتار = مسافت / وقت

سوال

ط اور ص کے مقامون سی جنمین ا میل کا فاصلہ تہا دو قاصد ایک ہی سمت مین ایک ہی وقت روانہ بھیجے جو ط سے قاصد چلا تہا وہ م میل فی گھنٹہ چلتا ہی اور جو ص سے قاصد چلا ہے وہ ن میل فی گھنٹہ چلتا ہی تو بتاؤ کب اور کہان یہہ قاصد آپسمین ملینگے

ط ص ف

فرض کرو کہ مقام ف پر ملاقی ہوئی اور ط ف = لد اور ص ف = ى اور چلنے سے ملنے تک کے وقت کو و سے تعبیر کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

لد = م و

ى = ن و

لد − ى = ا

ان مساواتون قیمتین و اور لد اور ى کی یہہ مستنبط ہوتی ہی اول سے دوم کو تفریق کرو کہ

لد − ى = (م − ن) و

اسواسطے و = ا / (م − ن)

لد = م ا / (م − ن)

ى = ن ا / (م − ن)

اب سوال کی تین صورتون پر مباحثہ کرتے ہین یعنی

م > ن

م = ن

م < ن

اول صورت مین قیمتین لد اور ى اور و کی مثبت ہین اسواسطے ہم یہہ نتیجہ نکالتی ہین کہ ایک خاص وقت کے بعد سے چلنے

اور ایک خاص مقام پر قاصد ملجائینگے اور جلد چلنے والا سست چلنے والی کو پکڑ لیگا
مثلاً فرض کرو کہ ا = ۳ میل اور م برابر ۶ میل کے اور ن برابر ۵ میل کے اور د = ۳ گھنٹے
اور لا = ۱۸ میل اور ی = ۱۵ میل یعنی اول قاصد تین گھنٹے میں ۱۸ میل چلیگا اور سست قاصد کو جو
۱۵ میل چلا ہوگا پکڑ لیگا دوسری صورت میں د اور ی اور لا کی قیمتیں ان تین صورتوں میں تعبیر ہونگیں کہ

د = ا/۰
لا = ام/۰
ی = ان/۰

اب ان نتائج کے معنی کس طرح بیان کرنے چاہیئے ؟ اس صورت میں فی نفسہ یہہ بات ظاہر ہی قاصد کبھی آپسمیں
نہ ملینگے کیونکہ جب وہ ایک ہی وقت چلے اور برابر رفتار سے چلتے ہیں تو جو فاصلہ اونکے درمیان اول تہا
وہی ہمیشہ رہیگا اسکو یون بیان کرو کہ چلنے کی مقامات سی فاصلہ غیر متناہی طی ہوگا
اس خیال سے ایک بڑا مسئلہ اسلوب تحلیلی میں ثابت ہوتا ہی کہ
اگر نسب نما کسی کسر کا صفر ہو اور شمار کنندہ متناہی ہو تو کسر غیر متناہی ہوتی ہی
اور اس بیان کو اس مساوات سے اسطرح تعبیر کرتے ہین کہ

ا/۰ = ∞

اسمین غیر متناہی رمز ∞ سے تعبیر ہوا ہے
یہہ ایک سوال مسایل حدود نہائی سے تعلق رکہتا ہے اور اوسکو ہم اسطرح بیان کرتے ہیں کہ
جب کسر کی نسب نما کی قیمت بی انتہا کم ہوتی ہی تو کسر کی قیمت بی انتہا بڑہتی ہی
تیسری صورت میں لا اور ی کی قیمتیں محدود ہیں لیکن منفی ہیں اس حالت میں سست قاصد پیچھے تیز قاصد کے
اسواسطے اوسکو پکڑ نہیں سکتا جو فاصلہ اونکی درمیان ہی وہ ہمیشہ بجای کم ہونے کے زیادہ ہوتا جاتا ہی اسواسطے
اگر وہ بائین طرف سی دائین طرف چلینگے تو کبھی نہ ملینگے
اسواسطے اس سمت میں صورت سوال کی حل ہونیکی ناممکن ہوجاتی ہی اب سوال یہہ ہی کہ کس طرح سے ہم نے
جو سوال کا حل رموز میں نکالا ہی اوسکی معنی کچھ بیان ہوسکتی ہیں ؟ صاف معنی اسکی اس بات
کے فرض کرنے سے بیان ہوسکتے ہیں کہ

تبدل جبریہ علامت کا = تبدل سمت

اگر اس اصول کو مانین تو - لا اور - ر وہ فاصلے ہونگے جو دائین طرف سے بائین طرف اندازہ کئے جائین اس صورت مین تیز قاصد ب سی چلیگا اور سست قاصد کے پیچھے چلکر پڑیگا اب اس صورت کی توضیح کے لئے فرض کرو کہ ا = ۳ اور م = ۵ اور ن = ۶

اب دوسری صورت پر یعنی م = ن پر دوبارہ غور کرتے ہین اور فرض کرتے ہین کہ ا = ۰ تو قیمتین و اور لا اور ر کی اس کسر سے تعبیر ہونگین ۰/۰

یہہ ایک کسر ہے جسمین شمار کنندہ اور نسب نما دونو معدوم ہوگئے ہین اب اسکے معنی کیا ہونگے؟

اب اس کسر کے معنی یہہ ہین کہ اونکی ہر ایک قیمت ہو سکتی ہی کیونکہ قاصد ایک ہی رفتار سی ایک ہی مقام سے چلے ہین اسلئے وہ ہمیشہ ملتی ہی رہینگے اور ہر مقام پر ایک ہی جگہہ دونو ہونگے یا یون بیان کرو کہ حل اس سوال کا غیر المعین ہے

اب اون سوالات پر مباحثہ کرتی ہین کہ جنمین کام کا اور کاریگرون کا جو یکسان کام کرتے ہین بیان ہوتا ہے یہہ بات نہایت آسان ہی کہ کام جو ایک خاص وقت ہو چکی اوسمین اور وقت مین کام کی پیمانہ واحد مین یا جو کام وقت کے پیمانہ واحد مین کیا جائے غرض ان سب مین ایک ارتباط قائم کیا جای یہہ ظاہر بات ہی کہ کل کام برابر ہی حاصلضرب وقت اور پیمانہ واحد کام کے اسکو ان مساواتون سے تعبیر کرتی ہین کہ

کام کیا گیا = پیمانہ واحد کام × وقت

کام کیا گیا کسی پیمانہ واحد وقت مین = کام کیا ہوا / وقت

اب اس امر کی توضیح کے واسطے اس سوال پر مباحثہ کرتے ہین

سوال

ایک ظرف مین تین دہانون سی پانی آتا ہی اور اون سی پر ہوتا ہی اول دہانہ سی ا منٹ مین اور دوسرے دہانہ سی ب منٹ مین اور تیسرے دہانہ سی ح منٹ مین تو بتاؤ اگر تینون دہانون سی پانی اوس ظرف مین آئی تو کتنی دیر مین وہ حوض پر ہوگا

یہہ سوال اوسیطرح حل ہوگا جس طرح کاریگرون کے سوالات حل ہوتے ہین کہ یہان کاریگر بجای ہین مگر کئی ہوئی کام کا

اندازہ اوس پانی سے ہوگا جو ظرف مین آیگا فرض کرو کہ کل کام کو ک تعبیر کرتا ہی اور وقت مطلوب لد منٹ ہی اب اگر اول دہانہ سے پانی آئے تو

پانی ایک منٹ مین جو بہریگا $= \frac{\text{ک}}{\text{ا}}$

صرف دوسرے دہانے سے پانی ایک منٹ مین جو بہریگا $= \frac{\text{ک}}{\text{ب}}$

صرف تیسرے دہانے سے پانی ایک منٹ مین جو بہریگا $= \frac{\text{ک}}{\text{ح}}$

اور ان تینون سے پانی ایک منٹ مین $= \frac{\text{ک}}{\text{لد}}$

اسواسطے یہہ ظاہر ہے کہ

$$\frac{\text{ک}}{\text{لد}} = \frac{\text{ک}}{\text{ا}} + \frac{\text{ک}}{\text{ب}} + \frac{\text{ک}}{\text{ح}}$$

ک پر تقسیم کرو تو

$$\frac{1}{\text{لد}} = \frac{1}{\text{ا}} + \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{ح}}$$

اب ہم خاص صورتون کا بیان کرتے ہین

فرض کرو کہ ح = ۰ تو اس صورت مین کسر $\frac{\text{ک}}{\text{ح}}$ غیر متناہی ہو جاتی ہی اور اسواسطے $\frac{1}{\text{لد}}$ غیر متناہی ہو جاتا ہے اور اسواسطے لد = ۰ اب اگر ح = ۰ تو اسے یہہ سمجہا جاتا ہی کہ تیسرے دہانے سے اسقدر پانی آتا ہے کہ اوسی ظرف کسی وقت مین پر نہین ہوتا تو اسواسطے اوسکو اور دو دہانون کے ساتہہ محسوب کرنا نہین چاہئے اور یہہ نتیجہ نکالنا چاہئے کہ فقط تیسرے دہانے ہی سے ظرف آناً فاناً مین پر ہو جاتا ہے

فرض کرو کہ ح = ∞ اس صورت مین $\frac{1}{\text{ح}}$ = ۰ اسواسطے

$$\frac{1}{\text{لد}} = \frac{1}{\text{ا}} + \frac{1}{\text{ب}}$$

پس ظرف کا پر ہونا موقوف فقط دو دہانون پر ہے اور یہہ فی نفسہ ہونا ہی چاہئے کیونکہ جب تیسرا دہانہ ایسا ہی کہ ایک غیر متناہی وقت ظرف کے پر کرنے مین لگاتا ہی تو ایک وقت محدود مین اوسکا اثر ظرف کے پر کرنے مین کیا ہوگا اسلئے اوسکو چہوڑ دینا چاہئے

فرض کرو کہ ح منفی ہے اور اپنی سمجہوتی کے لئے فرض کرو کہ ا = ۲۰ اور ب = ۳۰ اور ح = −۱۲ تو

$$\frac{1}{\text{لد}} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{\text{لد}} = 0$$

اسواسطے لد = ∞

اسواسطے ظرف کبھی پر نہین ہوگا تو اب بتلاؤ کہ اس نتیجہ کے معنی کیا بیان کرینگے بہت آسانی سے بیان کر سکتے ہین اسواسطے کہ ح منفی ہی اوسکی معنی موافق سابق کی صورتونکی مبدل سمت کے ہین اور جب اوسکی معنی مثبت

کے تہے تو اوسسے مراد پانی کا بہرنا تہا اسلیئے اوسکے معنی منفی کے ہونگے یانی کا خالی کرنا اس حالتمین ظرف
مین اس دہانہ سے پانی انی کی جگہہ پانی نکلیگا اور اسقدر نکلیگا جتنا کہ پانی سی پر ہوگا غرض جیسے کہ یہہ
ظرف خالی کرتا ہی ویسی باقی دو پر کرتے ہین اسواسطے وہ کبہی پر نہین ہوگا
اب ایک اور نئی صورت قابل غور اور خوض کرنیکے یہہ ہے کہ دو دہانون سے پانی اسقدر آتا نہ ہو جسقدر کہ
تیسرے دہانہ سے نکل جاتا ہو مثلاً فرض کرو کہ ا = ۲۰ اور ب = ۳۰ موافق سابق کے اور

ح = -۱۰ تو $\frac{1}{لد} = \frac{1}{۲۰} + \frac{1}{۳۰} - \frac{1}{۱۰}$

$\frac{1}{لد} = -\frac{1}{۶۰}$

اسواسطے لد = -۶۰

اب اگر اس صورت پر غور سے خیال کرین کہ اگر ظرف خالی ہو تو وہ کبہی تینون دہانون کے کہلنے سے پر نہین ہوگا
لیکن اگر ظرف پانی سے بہرا ہو تو وہ تینون دہانون کے کام کرنے سے ۶۰ منٹ مین پہر خالی ہو جاویگا
غرض اس سوال کے معنی بہی موافق اوسی اصول کے قایم ہین کہ علامات جبریہ کی تبدیل کی معنی پہلے معنی سے
متضاد ہو جاتی ہین یہان ظرف کا خالی ہونا ظرف کے پر ہونیکا متضاد تہا اور پر کرنیکا متضاد خالی کرنا تہا

درجہ دوم کی ہمزاد مساواتین دو مجہول کی

مساوات درجہ دوم جسمین لد اور ر طلتف ہون اوسکی صورت عام یہہ ہے کہ
$ا لد^۲ + ب لد ر + ح ر^۲ + د لد + ر ی + س = ۰$
اب اگر اسکو ایک اور مساوات درجہ دوم کی صورت عامہ کے ساتہہ ترکیب دین اور ر کو ساقط
کرین تو مساوات درجہ چہارم لد کی حاصل ہوگی
بعض خاص صورتین ایسی ہین کہ جنمین سے ایک یا دونو درجہ دوم کی مساواتین لد اور ر کی ایسے ہوتی ہین
کہ وہ اسقاط سے ایک مجہول کی مساوات درجہ کی طرف تحویل ہو جاتی ہین

صورت اول

فرض کرو کہ صورت عامہ مساوات درجہ دوم کی
$ا لد^۲ + ب لد ر + ح ر^۲ + د لد + ر ی + س = ۰$
ہے اوسکی اول درجہ کی مساوات کے ساتہہ ترکیب دیجا ے جسکی صورت یہہ ہے کہ
ر = م لد + ن

اگر یہہ قیمت ی کی اول مساوات مین درج کیجای تو ایک مساوات بعد اختصار کے یہہ حاصل ہوگی کہ

(ا + ب م + ح م^٢) لا^٢ + (ب ن + ٢ ح م ن + ر م) لا + ح ن^٢ + ر ن + س = ٠

یہہ مساوات درجہ دوم کی ہے جسسے کہ دو قیمتین لا کی دریافت ہونگین اگر انکو متواتر دوسری مساوات مین مندرج کرین تو ی کی دو قیمتین حاصل ہونگین

مثال

ان مساواتون ٣ لا^٢ − ٦ لا ی + ٤ ی^٢ − ٣ لا − ٢ ی + ٢ = ٠ ، کو حل کرو

٢ ی − ٦ لا + ١٠ = ٠

دوسری مساوات سے ی = ٣ لا − ٥

اس قیمت کو مساوات اول مین مندرج کرو تو یہہ مساوات درجہ دوم کی حاصل ہوگی کہ

٢١ لا^٢ − ٩٨ لا + ١١٢ = ٠

(اب اس مساوات کو سیدہی ترکیب سے حل کرین تو) صفحہ ١٠٤ سے

٤٢ لا − ٩٨ = ± ١٤

اسواسطے لا = ٨/٣ یا ٢

ان قیمتون کو مساوات

ی = ٣ لا − ٥ مین مندرج کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ی = ٣ یا ١

صورت دوم

فرض کرو کہ مساوات

ا لا^٢ + ب لا ی + ح ی^٢ + د لا + ر ی + س = ٠ ہو

اب اسکو ایک اور مساوات درجہ دوم کے ساتھہ ترکیب دین جو متجانسہ ہو یعنی جسمین ارقام دوسری درجہ کی ہی ہون یعنی اوسکی صورت یہہ ہو کہ

اَ لا^٢ + بَ لا ی + حَ ی^٢ = ٠

اب اس مساوات کو ی^٢ پر تقسیم کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

اَ (لا/ی)^٢ + بَ (لا/ی) + حَ = ٠

اب یہہ مساوات درجہ دوم لا/ی کی ہے اب اوسکی دو قیمتین سہ اور صہ فرض کرو تو

لا = سہ ی

لا = صہ ی

اب ان قیمتون کو لا کی جگہہ اول مساوات مین رکہو تو درجہ دوم کی مساواتین ی کی حاصل ہو نگلت

اور اسواسطے ی کی چار قیمتین معلوم ہونگین اور ی کی ہر زوج قیمتون سے لا کی قیمتون کا زوج معلوم ہوگا

مثال

ان مساواتون $لا^۲ + لا ی - ۳ ی^۲ - ۳ لا + ۴ ی - ۱ = ۰$ کو حل کرو
$لا^۲ + ۴ لا ی - ۱۲ ی^۲ = ۰$

دوسری مساوات کو $ی^۲$ پر تقسیم کرو تو

$$\left(\frac{لا}{ی}\right)^۲ + ۴\left(\frac{لا}{ی}\right) - ۱۲ = ۰$$

انسے
$لا = ۲ ی$
$لا = -۶ ی$

ان قیمتون سے دو مساواتین درجہ دوم کی حاصل ہونگین یعنی

$۳ ی^۲ - ی - ۲ = ۰$
$۱۴ ی^۲ + ۱۱ ی - ۱ = ۰$

اول مساوات سے

$ی = ۱$ اور $ی = -\frac{۲}{۳}$

انکے موافق $لا = ۲$ اور $لا = -\frac{۴}{۳}$

دوسری مساوات سے $ی = \frac{-۱۱ \pm \sqrt{۱۷۵}}{۲۸}$

جسکے موافق $لا = \frac{۶۶ \mp ۶\sqrt{۱۷۵}}{۲۸}$

صورت سوم

اگر دو نو مساواتین درجہ دوم کی ہون اور نہین دوسرا ہی درجہ کی رکھین ہین تو وہ ان صور عامہ

$ا لا^۲ + ب لا ی + ج ی^۲ = ط$
$اَ لا^۲ + بَ لا ی + جَ ی^۲ = طَ$

ضرب چلیپا اور تفریق سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

$(ا طَ - اَ ط) لا^۲ + (ب طَ - بَ ط) لا ی + (ج طَ - جَ ط) ی^۲ = ۰$

یہہ مساوات متجانسہ درجہ دوم کی ہی موافق صورت سابق کے دو قیمتین سہ اورصہ حاصل ہونگین

$لا = سہ ی$
$لا = صہ ی$

اب مفروضہ مساواتون مین سے لا کی جگہہ ان قیمتون مین سے کسی قیمت کو مندرج کرو تو ی کی ہر قیمت کے مطابق لا کی قیمتون کا ایک زوج دریافت ہوگا

مثالین

(۱) ان مساواتون $۵ لا^۲ - ۳ لا ی + ۲ ی^۲ = ۳۵$ کو حل کرو
$۳ لا^۲ + ۴ لا ی - ی^۲ = ۳۸$

ضرب چلیپا اور تفریق سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$۱۲۰\left(\frac{لا}{ی}\right)^۲ - ۲۵۴\left(\frac{لا}{ی}\right) + ۱۱۱ = ۰$$

اسے معلوم ہوتا ہے کہ

لد = ۳/۲ ی

لد = ۳۷/۶۰ ی

اب مفروضہ مساواتون مین سے دوسری مساوات مین اس ہر ایک قیمت کے مندرج کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ی = ± ۲

اسکے موافق لد = ± ۳

اب لد کی دوسری قیمت مندرج کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ی = ± ۶۰/√۲۱۱

اسکے مطابق لد = ± ۳۷/√۲۱۱

صورت چہارم

اگر دو نو مساواتین درجہ دوم کی ہون اور درجہ دوم کا ایک جملہ اس قابل ہو کہ وہ ایسی اجزاء ضربی مین تحلیل ہوسکے کہ جنمین لد اور ی ملتصق ہون تو وہ اس طرح تعبیر ہوسکتی ہین کہ

ا لد² + ب لد ی + ح ی² + د لد + ر ی + س = ۰

(م لد + ن ی + ع) (مَ لد + نَ ی + عَ) = ۰

اس صورت مین ہر ایک مساوات ان مساواتون مین سے

م لد + ن ی + ع = ۰

مَ لد + نَ ی + عَ = ۰

اول مساوات کے ساتھہ ترکیب پاسکتی ہی اور موافق صورت اول کے ہر ایک ترکیب سے لد اور ی کی قیمتون کے ازواج معلوم ہونگے

درجہ دوم کے جملہ کے اجزاء ضربی لد اور ی مین تحلیل کرنے کے ترکیب نیچے مثال مین بیان ہوگی اگر اونکا تحلیل ہونا ممکن ہوگا تو وہ تحلیل ہوجائنگے

مثال

ان مساواتون لد² − ۳ لد ی + ۳ ی² − لد − ۳ ی − ۲ = ۰

۳ لد² + لد ی − ۱۵ ی² + ۲ لد + ۱۷ ی − ۴ = ۰

اب ہمکو اول یہہ نہین معلوم ہوتا کہ ان دو جملون مین سے کونسا اجزاء ضربی مین جدا جدا ہوسکتا ہے اسلئے ہر ایک کا امتحان کرنا چاہئے اگر اول جملہ مین ہم تقسیم اجزاء ضربی مین نہ کرسکین تو دوسری مساوات پر امتحان کرنا چاہئے

مساوات دوم کو درجہ دوم کی مساوات لد کی خیال کرسکتی ہین اسلئے اسکو اسطرح لکھو کہ

۳ لد² + (ی + ۲) لد − (۱۵ ی² − ۱۷ ی + ۴) = ۰

اب ترکیب ہندی سی اس مساوات کو حل کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$۴لا + ی + ۲ = \pm \sqrt{(ی + ۲)^۲ + ۸(۱۵ی^۲ - ۱۷ی + ۴)}$$

اب جو علامت جذر کی اندر ہی اوسکی تحویل اس طرح ہوسکتی ہے کہ

$$۱۲۱ی^۲ - ۱۳۲ی + ۳۶$$

اور یہہ ایک مجذور کامل ہی یعنی برابر ہے $(۱۱ی - ۶)^۲$ پس یہی امتحان ہے کہ جملہ مین قابلیت اجزاء ضربی مین تحلیل ہونی کی ہے لا کی دو قیمتین ی کی رقمون مین یہہ ہین کہ

$$لا = \frac{۵}{۲}ی - ۲$$

$$لا = -\frac{۳}{۲}ی + ۲$$

اسواسطے بموجب مقدمہ دوم صفحہ ۱۱۵ کے جملہ کی دو اجزاء ضربی یہہ ہونگی

$$(۲لا - ۵ی + ۴)(لا + ۳ی - ۱)$$

لیکن چونکہ یہہ جملہ برابر صفر کے ہی اسواسطے دونو اجزاء ضربی مین ایک برابر صفر کے ہوا اور اوسکو اول مساوات مفروضہ کے ساتھہ ترکیب دو

اول مین سے لا کے اسقاط کرنے سے یہہ حاصل ہوگا کہ

$$۱۷ی^۲ - ۴۲ی + ۱۶ = ۰$$

اسسے ی کی یہہ قیمتین حاصل ہوتی ہین کہ

$$ی = ۲ \text{ اور } \frac{۸}{۱۷}$$

اور اسیواسطے لا کی قیمتین یہہ ہین کہ

$$لا = ۳ \text{ اور } \frac{۶}{۱۷}$$

اب اگر ہم لا کو دوسری مساوات کے اسے ساقط کرین تو ہمکو یہہ مساوات درجہ دوم کی حاصل ہوگی کہ

$$۱۸ی^۲ - ۷ی - ۲ = ۰$$

اوسسے ی کی یہہ قیمتین حاصل ہوتی ہین کہ

$$ی = \frac{۷ \pm \sqrt{۱۹۳}}{۳۶}$$

اور اسواسطے لا کی قیمتین

$$لا = \frac{۱۵ \mp ۳\sqrt{۱۹۳}}{۳۶}$$

صورت پنجم

فرضکرو کہ دونو مساواتین درجہ دوم کی یہہ ہون کہ

$$الا^۲ + ب لا ی + ح ی^۲ + د لا + ر ی + س = ۰$$

$$اَلا^۲ + بَ لا ی + حَ ی^۲ + دَ لا + رَ ی + سَ = ۰$$

اور درجہ دوم کے ارقام کے اشکال مناسب ہین یعنی

$$ا : اَ :: ب : بَ :: ح : حَ :: م : ن$$

اگر اول مساوات کو ن مین ضرب دین اور دوسری مساوات کو م مین اور دوسری مساوات کو اول مساوات سے تفریق کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

(ن د — م دَ) لا + (ن ر — م رَ) ی + (ن س — م سَ) = ۰

اب یہہ مساوات درجہ اول کی ہی جسکی ترکیب بموافق صورت اول کے کسی مفروضہ مساوات سی ہوسکتی ہے

مثال

ان مساواتون ۶ لا۲ — ۴ لا ی + ۲ ی۲ — ۳ لا + ۸ ی — ۴۸ = ۰

۹ لا۲ — ۶ لا ی + ۳ ی۲ + ۲ لا — ۳ ی — ۸۷ = ۰

اگر اول مساوات کو ۳ مین اور دوسری کو ۲ مین ضرب دین اور تفریق کرین تو یہہ حاصل ہوگا

۳۰ لا — ۳۰ ی — ۳۰ = ۰

اسواسطے لا = ی + ۱

اب اول مساوات مین لا کی قیمت مندرج کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

۲ ی۲ + ۷ ی — ۲۲ = ۰

جسسے ی = ۲ اور ی = — ۱۱/۲

اور اسیواسطے لا = ۳ اور لا = — ۹/۲

صورت ششم

فرض کرو کہ مساواتین

ا لا۲ + ب لا ی + ح ی۲ + د لا + ر ی + ف = ۰

اَ لا۲ + بَ لا ی + حَ ی۲ + دَ لا + رَ ی + فَ = ۰

اور انمین یہہ ارتباط ہو کہ

د : دَ :: ر : رَ :: س : سَ :: م : ن

اب اگر اول مساوات کو ن مین اور دوسری مساوات کو م مین ضرب دین اور ماحصل کو تفریق کرین تو ایک مساوات متجانس درجہ دوم کی یہہ حاصل ہوگی کہ

(ن ا — م اَ) لا۲ + (ن ب — م بَ) لا ی + (ن ح — م حَ) ی۲ = ۰

اب اسکو موافق صورت دوم کی مفروضہ مساواتون مین سے کسی مساوات کی ساتہہ ترکیب دو

مثال

ان مساواتون ۴ لا۲ — ۶ لا ی + ۸ ی۲ — ۳ لا + ۶ ی — ۱۶ = ۰

۹ لا۲ + ۶ لا ی — ۶ ی۲ — ۳ لا + ۹ ی — ۲۴ = ۰

اول مساوات کو ۳ مین اور دوسری مساوات ۲ مین ضرب دو اور ماحصلون کو تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا

$$۶\,\text{لا}^{2} + ۳۰\,\text{لا ی} - ۳۶\,\text{ی}^{2} = ۰$$

اسواسطے

$$\left(\frac{\text{لا}}{\text{ی}}\right)^{2} + ۵\left(\frac{\text{لا}}{\text{ی}}\right) - ۶ = ۰$$

اسسے معلوم ہوتا ہے کہ $\text{لا} = \text{ی}$ اور $\text{لا} = -۶\,\text{ی}$

اول مفروضہ مساوات مین لا کی پہلی قیمت مندرج کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$۳\,\text{ی}^{2} + ۲\,\text{ی} - ۸ = ۰$$

اسسے $\text{ی} = -۲$ اور $\text{ی} = \frac{۴}{۳}$

اسکے موافق $\text{لا} = -۲$ اور $\text{لا} = \frac{۴}{۳}$

اب اگر لا کی دوسری قیمت مندرج کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$۹۴\,\text{ی}^{2} + ۹\,\text{ی} - ۸ = ۰$$

اسسے $\text{ی} = \frac{-۹ \pm \sqrt{۳۰۸۹}}{۱۸۸}$

اسکے موافق $\text{لا} = \frac{۵۴ \mp ۶\sqrt{۳۰۸۹}}{۱۸۸}$

امثلہ مشق ۴۸

(۱) $\text{لا}^{2} + \text{ی}^{2} = ۱۳$ — $\text{لا} - \text{ی} = ۱$

(۲) $\text{لا}^{2} + \text{ی}^{2} = ۷۴$ — $\text{لا} + \text{ی} = ۱۲$

(۳) $\text{لا}^{2} - \text{ی}^{2} = ۸$ — $۳\,\text{لا} - \text{ی} = ۱۰$

(۴) $۲\,\text{ی}^{2} - \text{لا}^{2} = ۱۷$ — $\text{ی} + ۲\,\text{لا} = ۵$

(۵) $\text{لا}^{2} + \text{ی}^{2} = ۱۳۰$ — $\text{لا ی} = ۳۳$

(۶) $\text{لا}^{2} - \text{ی}^{2} = ۱۲۰$ — $\text{لا ی} = ۹۱$

(۷) $\text{لا}^{2} + \text{لا ی} + \text{ی}^{2} = ۱۴٫۹۷$ — $\text{لا} - \text{ی} = ۱٫۲$

(۸) $\text{لا}^{2} - \text{لا ی} + \text{ی}^{2} = ۹\frac{۳}{۴}$ — $\text{لا} - \text{ی} = ۱$

(۹) $\text{لا}^{2} - \text{لا ی} + \text{ی}^{2} = ۲۱$ — $\text{لا} + \text{ی} = ۹$

(۱۰) $۲\,\text{لا}^{2} + ۳\,\text{لا ی} - \text{ی}^{2} = ۲$ — $۲\,\text{لا} - \text{ی} + ۱ = ۰$

(۱۱) $۳\,\text{لا}^{2} - ۵\,\text{لا ی} + ۳\,\text{ی}^{2} = ۲۰$ — $\text{لا} + \text{ی} = ۶$

(۱۲) $۲\,\text{لا ی} + ۱۴ = ۱۰\,\text{ی}$ — $۱۲\,\text{لا} - ۶\,\text{ی} + ۱ = ۰$

(۱۳) $۳\,\text{لا}^{2} + ۵\,\text{ی}^{2} = ۱۰۷$ — $۲\,\text{لا} - \text{ی} - ۲ = ۰$

(۱۴) $۴\,\text{ی}^{2} = ۳\,\text{لا}^{2} + \text{لا ی}$ — $\text{لا}^{2} + \text{ی}^{2} = ۲۵$

(۱۵) $۴\,\text{لا}^{2} - ۲\,\text{لا ی} + ۳\,\text{ی}^{2} = ۴۵$ — $\text{لا ی} + \text{ی}^{2} + ۲ = ۰$

(۱۶) $\frac{\text{لا}}{\text{ی}} + \frac{\text{ی}}{\text{لا}} = ۲\frac{۹}{۱۰}$ — $\text{لا ی} = ۱۰$

(۱۷) ۱/لا + ۱/ی = ۵/۶ — لا ی = ۶

(۱۸) ۲/لا − ۳/ی = ۵ — لا ی = ۱

(۱۹) ی/لا + ۱/ی = ۱/۱۵ — لا − ی = ۸

(۲۰) ۱/لا + ۱/ی = ۷ — لا² + ی² = ۲۹

(۲۱) لا/ی − ی/لا = ۱ ۱/۲ — لا² + ی² = ۲۰

(۲۲) ۲لا + ۳ی = ۱۱۸ — ۵لا² − ۷ی² = ۴۳۳۳

(۲۳) ۸لا/ی = ۸ی/لا — ۳لای + ۲لا + ی = ۴۸۵

(۲۴) لای − ۲لا + ۳ی = ۳۱ — لا² − ۷لای + ۱۲ی² = ۰

(۲۵) ۳لا + ۴ی + ۸ = ۲لای — ۳لا² + لای − ۲ی² − ۳۰لا + ۱۰ی + ۱۲ = ۰

(۲۶) ۴لا² − ۳لای + ۶ی² + ۸لا − ۱۰ی + ۳۴ = ۰
۱۰لا² − ۵لای + ۱۵ی² − ۱۵لا + ۱۰ی + ۵۰ = ۰

(۲۷) لا + ۲ی + ۳لا/ی = ۱۶ — ۳لا + ی + ۳لا/ی = ۲۳

(۲۸) لا² − ۳لای − ی² = ۳۱ — لا² + ۴لای − ۳ی² = ۲۰۲

خاص ترکیبین مساواتون کے حل کرنے کی

جبریہ جملوں کی ان گنت صورتین بوقلمون ہوتی ہین اسلئے ناممکن ہے کہ کوئی اونکی واسطے قواعد عامہ ایسی مقرر کیئے جائین کہ جنسے ہر مساوات یا نظم مساوات حل ہو جائین تجربہ اور مشق سی جملوں کی صورتین اور ترکیبین ذہن مین ایسی آجاتی ہین کہ جنسی طالب علم اونکو سادی صورتونمین تحویل کرلیتے ہین اور پہر حل کرلیتے ہین بے شمار مساواتین ایسی ہوتی ہین کہ جو حل کرنیکے واسطے پیش کیجاتی ہین اور اول نگاہ مین یہہ ممکن نہین معلوم ہوتا کہ وہ اون باقاعدہ صورتون مین جنکا بیان ابتک ہوا تحویل ہو کر حل ہو سکتی ہین مگر بعض خاص ترکیبین اور حکمتین ہین جنسے کہ مساواتون کے حل کرنیمین کامیابی ہوتی ہے

توضیح کے واسطے مثالین ذیل مین لکھی جاتی ہین

مثالین

ان مساواتون ۱۳ ا ی ہ لا²/ی + ۳ = ۶لا² + ۳۰ی

۴لا² + ی² = ۲لا (۵ی + ۴لا)

دوسری مساوات معاینہ سے متجانس معلوم ہوتی ہے یعنی اونمین کوئی رقم ایسی نہین ہے کہ اوسکا دوسرا درجہ لا اور ی کا نہ ہو ایسی صورتون مین ہم مجہولہ مقادیر مجہول کی نسبت دریافت کرسکتے ہین

فرض کرو کہ ی = ط لا اس ی کی قیمت کو دوسری مساوات میں مندرج کرو تو ایک مساوات درجہ دوم ط کی حاصل ہوگی یعنی

ط٢ − ١٠ ط + ١٦ = ٠

اسواسطے ط = ٨ یا ٢

ی = ٨ لا یا ی = ٢ لا

ی کی جگہہ ٨ لا کو اول مساوات میں مندرج کرو اور مختصر کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

٩ لا٢ + ١٤٢ لا − ١٧١٢ = ٠

اسواسطے
لا = ٨ اور − ٢١٤/٩
ی = ٦٤ اور − ١٧١٢/٩

ی کی جگہہ ٢ لا رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

١٨ لا٢ + ٧١ لا − ٢١٤ = ٠

اسواسطے
لا = ٢ اور − ١٠٧/١٨
ی = ٤ اور − ٢١٤/١٨

(٢) ان مساواتوں ٤ لا٢ + ٤ ی٢ = ١٧ لا ی
لا½ − ی½ = ٣ کو حل کرو

اس مساوات میں مساوات اول متجانس ہے اسواسطے فرض کرو کہ ی = ط لا تو یہہ حاصل ہوگا کہ

٤ ط٢ − ١٧ ط + ٤ = ٠

اسواسطے ط = ٤ یا ١/٤

ی = ٤ لا یا لا/٤

اول قیمت مساوات دوم میں رکھو تو یہہ حاصل ہوگا

لا = ٩ اور ١
ی = ٣٦ اور ٤

دوسری مساوات میں اندراج قیمت سے

لا = ٣٦ اور ٤
ی = ٩ اور ١

یہہ نظم قیمتوں کا مطابق اون قیمتوں کی ہے جو اوپر حاصل ہوئیں ہیں اونمیں لا اور ی میں تبادل ہوا ہے ایسی صورتوں میں کہ حروف لا اور ی بالقرینہ واقع ہوں یہی نتیجہ نکلیگا

بہت سی صورتوں میں ہمزاد مساواتیں مجموعہ یا فرق مقادیر مجہولہ کا یا مجموعہ یا فرق مقادیر مجہولہ کی خاص قوتوں کا بالقرینہ واقع ہوتا ہی ایسی صورتوں میں اکثر مسایل ذیل کی استعانت سے ایسی اندراج ہوتی ہیں کہ حل مطلوب معلوم ہو جاتا ہے فرض کرو کہ

لا + ی = ص
لا ی = ع

فرض کرو کہ اول مساوات کی ہر ایک طرف کو دوسرے تیسرے چوتھی یا پانچوین قوت مین موجب ضابطہ ثنائی کے اٹھائیں (صفحہ ۱۳۶) اور جن رقموں کی امثال متساوی ہون اونکو یکجا جمع کرو اور اوسی ذیل کے جملے لا اور ی کی قوتون کے مجموعہ کے لئے حاصل

$$لا + ی = ص$$
$$لا^{۲} + ی^{۲} = ص^{۲} - ۲ع$$
$$لا^{۳} + ی^{۳} = ص^{۳} - ۳ع\,ص$$
$$لا^{۴} + ی^{۴} = ص^{۴} - ۴ع\,ص^{۲} + ۲ع^{۲}$$
$$لا^{۵} + ی^{۵} = ص^{۵} - ۵ع\,ص^{۳} + ۵ع^{۲}\,ص$$

اور اسیطرح سے اگر

$$لا - ی = د$$
$$لا\,ی = ع$$

یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ

$$لا - ی = د$$
$$لا^{۲} + ی^{۲} = د^{۲} + ۲ع$$
$$لا^{۳} - ی^{۳} = د^{۳} + ۳ع\,د$$
$$لا^{۴} + ی^{۴} = د^{۴} + ۴ع\,د^{۲} + ۲ع^{۲}$$
$$لا^{۵} - ی^{۵} = د^{۵} + ۵ع\,د^{۳} + ۵ع^{۲}\,د$$

فرض کرو کہ لو اور مو نصف مجموعہ اور نصف فرق لا اور ی کا ہے تو

$$لا = لو + مو$$
$$ی = لو - مو$$

اگر ضابطہ ثنائی کے موافق ان جملوں کو مثلث کریں اور مستحصلہ مساواتوں کو جمع کریں تو یہہ جملے حاصل ہونگے

$$لا + ی = ۲لو$$
$$لا^{۲} + ی^{۲} = ۲لو^{۲} + ۲مو^{۲}$$
$$لا^{۳} + ی^{۳} = ۲لو^{۳} + ۶لو\,مو^{۲}$$
$$لا^{۴} + ی^{۴} = ۲لو^{۴} + ۱۲لو^{۲}\,مو^{۲} + ۲مو^{۴}$$
$$لا^{۵} + ی^{۵} = ۲لو^{۵} + ۲۰لو^{۳}\,مو^{۲} + ۱۰لو\,مو^{۴}$$

تفریق کرنے سے

$$لا - ی = ۲مو$$
$$لا^{۲} - ی^{۲} = ۴لو\,مو$$
$$لا^{۳} - ی^{۳} = ۶لو^{۲}\,مو + ۲مو^{۳}$$
$$لا^{۴} - ی^{۴} = ۸لو^{۳}\,مو + ۸لو\,مو^{۳}$$
$$لا^{۵} - ی^{۵} = ۱۰لو^{۴}\,مو + ۲۰لو^{۲}\,مو^{۳} + ۲مو^{۵}$$

تواہ مجموعہ اور فرق کے واسطے ایسی جملوں کے سلسلہ کو جہان تک چاہو پہیلا لو لیکن بالفعل ہمارا مطلب فقط یہین تک پہیلانے سے نکل آتا ہے

مثالیں

(۱) ان مساواتون $لا^{۳} + ی^{۳} = ۱۳۳$ ، $لا + ی = ۷$ کو حل کرو

اگر ہم فرض کرین کہ لا = لو + مو اور ی = لو − مو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

۲لو۳ + ۶لومو۲ = ۱۳۳

دوسری مساوات سے جو لو کی قیمت حاصل ہوتی ہی اوسکو اول مساوات مین رکہنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

۲لو = ۷

لو = ± ۷/۲

مو = ± ۳/۲

اب اسکو لو = ۷/۲ ساتہہ ترکیب دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

لا = ۵ اور لا = ۲

ی = ۲ اور ی = ۵

(۲۱) ان مساواتون لا۵ + ی۵ = ۶۸۳۳۶ کو حل کرو

لا + ی = ۸

لا اور ی کے انہین حلون سے مساواتون کی ہئیت اس صورت مین بدل جائیگی کہ

۲لو۵ + ۲۰لو۳مو۲ + ۱۰لومو۴ = ۶۸۳۳۶

۲لو = ۸

اسسے مساوات درجہ دوم مو کے یہہ حاصل ہوتی ہے کہ

مو۴ + ۳۲مو۲ − ۳۳ = ۰

اسواسطے مو۲ = ۱ یا − ۳۳

مو = ± ۱ اور مو = ± √−۳۳

اب ان قیمتون کی ترکیب سے مع

لو = ۴

کے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ لا = ۵ اور لا = ۳

ی = ۳ اور ی = ۵

اور نیز لا = ۴ ± √−۳۳

ی = ۴ ∓ √−۳۳

(۳) ان مساواتون لا۲/ی + ی۲/لا = ۱۸ کو حل کرو

لا + ی = ۱۲

کسور سے مساوات کو صاف کرو اور ص کی جگہہ لا + ی اور ع کی جگہہ لا ی رکہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ص۳ − ۳ع ص = ۱۸ع

ص = ۱۲

اسواسطے ع = ۳۲

اسواسطے مفروضہ مساواتون کی تحویل یہہ ہوگی کہ

لا + ی = ۱۲

لا ی = ۳۲

لا اور ی کی قیمتین یہہ نکلتے ہین کہ

لا = ۸ اور ی = ۴

اب اگر دوسری مساوات کو ۳ مین ضرب دین اور اول مساوات کے ساتھہ جمع کرین تو

$$\text{مو}^2 + \text{لو}\,\text{مو} - 2\,\text{لو}^2 = 0$$

اور یہہ مساوات لو اور مو مین متجانس ہے تو اونکی نسبت یہہ فرض کرنے سے دریافت ہوگی کہ

$$\text{مو} = \text{ط}\,\text{لو}$$

اسے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ط}^2 + \text{ط} - 2 = 0$$

اسے

$$\text{ط} = 1 \quad \text{اور} \quad \text{ط} = -2$$

اسواسطے

$$\text{مو} = \text{لو} \quad \text{اور} \quad \text{مو} = -2\,\text{لو}$$

ان قیمتون کے اندراج سے اور تحویل سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{لا} = 0 \quad \text{اور} \quad \text{ی} = 0$$

$$\text{لا} = 4 \quad \text{اور} \quad \text{ی} = 8$$

$$\text{لا} = 1 \quad \text{اور} \quad \text{ی} = 8$$

ان قیمتون سے مفروضہ مساواتون کی شرائط پوری ہون اسلیئے ضرور ہوگا کہ نسبت قیمتون کی دوسری زوج کو کام مین لائین اور تیسری زوج کے کام مین لانے کے لیئے $\frac{1}{\text{لا}^2}$ کی منفی قیمت کام مین لائین

امثلہ مشق ۹۴

(۱) $\text{لا}^3 - \text{ی}^3 = 7930$ ، $\text{لا} - \text{ی} = 10$

(۲) $\text{لا}^4 + \text{ی}^4 = 706$ ، $\text{لا} + \text{ی} = 8$

(۳) $\text{لا}^2 + \text{لا}\,\text{ی} + \text{ی}^2 = 49$ ، $\text{لا}^4 + \text{لا}^2\text{ی}^2 + \text{ی}^4 = 931$

(۴) $\text{لا}^2 + \text{ی}^2 + \text{لا} + \text{ی} = 26$ ، $4(\text{لا} + \text{ی}) = 3\,\text{لا}\,\text{ی}$

(۵) $\text{لا}^{\frac{3}{5}} + \text{ی}^{\frac{1}{2}} = 35$ ، $\text{لا}^{\frac{1}{5}} + \text{ی}^{\frac{1}{6}} = 5$

(۶) $\text{لا}^3 + \text{ی}^3 + 18(\text{لا} + \text{ی}) = 125$ ، $\text{لا}\,\text{ی} = 6$

(۷) $(\text{لا} - \text{ی})(\text{لا}^2 - \text{ی}^2) = 16$ ، $(\text{لا} + \text{ی})(\text{لا}^2 + \text{ی}^2) = 40$

(۸) $\frac{\text{ی}}{\text{لا}} - \frac{\text{لا}}{\text{ی}} = \frac{\text{لا} - \text{ی}}{\text{لا}^2 + \text{ی}^2}$ ، $\frac{\text{لا}^2}{\text{ی}^2} - \frac{\text{ی}^3}{\text{لا}^3} = \frac{\text{لا} + \text{ی}}{\text{ی}^2}$

(۹) $\text{لا}^3 - \text{ی}^3 = \text{م}\,\text{ب}^3$ ، $\text{لا} - \text{ی} = \text{ب}$

(۱۰) $\text{لا}^2 + \text{ی}^2 = 49 + 2\,\text{لا}\,\text{ی}$ ، $\text{لا}^4 + \text{ی}^4 - \text{لا}^2 = 20 + (2\,\text{لا}^2 - 1)\,\text{ی}^2$

(۱۱) $3\,\text{لا}^2 + 4\,\text{ی}^2 = 7\,\text{لا}\,\text{ی}$ ، $\text{لا}^3 - \text{لا}^2\,\text{ی} = \frac{5}{9}\,\text{ی}^2$

(۱۲) $5\,\frac{\text{لا} + \text{ی}}{\text{لا} - \text{ی}} - 20\,\frac{\text{لا} - \text{ی}}{\text{لا} + \text{ی}} - 21$ ، $13(\text{ی} - \text{لا}) = 1$

(۱۳) $(\text{لا}^2 + \text{ی}^2)(\text{لا}^3 + \text{ی}^3) = 455$ ، $\text{لا} + \text{ی} = 5$

(۱۴) $\text{لا}^2\,\text{ی} - \text{لا}\,\text{ی}^2 = 30$ ، $\text{لا}^3\,\text{ی}^2 - \text{لا}^2\,\text{ی}^3 = 450$

(۱۵) $3(\text{لا}^2 + \text{ی}^2)(\text{لا} + \text{ی}) = 15\,\text{لا}\,\text{ی}$ ، $4(\text{لا}^4 - \text{ی}^4)(\text{لا}^2 - \text{ی}^2) = 45\,\text{لا}^2\,\text{ی}^2$

(۱۶) $\text{لا}^3 - \text{ی}^3 = 169(\text{لا} - \text{ی})^3$ ، $\text{لا}\,\text{ی} = 56$

(۱۷) لا^۲ + ی^۲ = ۳۰۲۶ ، √لا + √ی = ۱۲

(۱۸) لا^۳ + ی^۳ = (لا + ی) لا ی = ۵ لا ی

(۱۹) (لا + ی)^۳ + ا (لا + ی) = ب ، ۳ لا ی + ا = ۰

(۲۰) ۴ لا^۲ + ۴ ی^۲ = ۱۷ لا ی ، √لا − √ی = ۳

(۲۱) لا/ی − ی/لا = (لا + ی)/(لا^۲ + ی^۲) ، لا^۲/ی^۲ − ی^۲/لا^۲ = (لا − ی)/ی^۲

(۲۲) ی + √(ی/لا) = ۴۲/لا ، لا^۲/۳ + لا/(۲ ی) = ۵۴/ی

(۲۳) ۸ (لا + ی + لا ی) = (لا^۲ + ی^۲)^۲ ، √(لا + ی) + √(۴ − لا − ی) = √۳ + ۱

(۲۴) ۱۷/√(لا + ی) − ۷ ، √(لا + ی)/لا = ۱۰ √(لا/(لا + ی)^۲)

√(لا − ی) = ی − ۱

(۲۵) لا + ۲ √(لا ی) + ی = ۱۴۳ + ۲ (√لا + √ی)

۹ √(لا ی) = (۹ + √ی)^۲

(۲۶) (√ی − √لا) (ا − لا) = ۳ √لا (ی − لا)

ا − لا^۲ = ۳ ی لا

(۲۷) √(لا/ی) + √(ی/لا) = ۶۱/√(لا ی) + ۱ ، ∜(لا^۳ ی) + ∜(لا ی^۳) = ۷۸

(۲۸) (لا + ی − √(لا^۲ + ی^۲))/(لا + ی + √(لا^۲ + ی^۲)) = ۲ لا/ا ، لا/ی = √((ا + لا)/(ا − ی))

(۲۹) ی^۴ = لا^۲ (ا ی − ب لا) ، لا^۲ = ا لا − ب ی

(۳۰) (لا^۲ + ۱) ی = ا (ی^۲ + ۱) لا^۲ ، (ی^۲ + ۱) لا = ا (لا^۲ + ۱) ی^۳

تین مجہول کی درجہ دوم کی مساواتون کے حل کرنیکی ترکیبون کی توضیح امثلہ ذیل مین کیجاتی ہین

مثالین

(۱) ان مساواتون

لا^۲ + ی^۲ + ي^۲ = ۲۱

لا ی + ي (لا + ی) = −۶

لا + ی − ي = −۵

دوسری مساوات کا دوچند اول مساوات کے ساتھہ جمع کرو اور جذر نکالو تو

لا + ی + ي = ±۳

اب اسکو سوم مساوات کے ساتھہ جمع تفریق کرو تو

لا + ی = ۱ ، لا + ی = −۴

ي = ۴ ، ي = ۱

اول مساوات مین ان قیمتون کو مندرج کرو تو لا اور ی کے بہہ زوج مساواتون کے حاصل ہونگے کہ

$لا^2 + ر^2 = ۵$ اور $لا^2 + ر^2 = ۲۰$

$لا + ر = -۱$ اور $لا + ر = -۴$

ان سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$لا = ۱$ ، -۲ اور $لا = -۲ \pm$

$ر = -۲$ ، ۱ اور $ر = ۲ \mp$

$ی = ۴$ ، ۴ اور $ی = ۱$

ان مساواتون کو حل کرو

$ی^2 - ر لا = ۱۰$

$ر^2 - لا ی = ۱$

$لا^2 - ی ر = -۸$

اول سے دوم کو تفریق کرو اور سوم کو دوم سے تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$(ی - ر)(ی + ر + لا) = ۹$

$(ر - لا)(ی + ر + لا) = ۹$

اسواسطے $ی - ر = ر - لا$

$ی + لا = ۲ ر$

اسس مساوات کا مجذور کرو تو

$ی^2 + ۲ ی لا + لا^2 = ۴ ر^2$

$۴ ی لا = ۴ ی لا$

تفریق کرنے سے $(ی - لا)^2 = ۴ (ر^2 - لا ی)$

لیکن دوم مساوات مفروضہ سے

$ر^2 - لا ی = ۱$

اسواسطے $(ی - لا)^2 = ۴$

$ی - لا = \pm ۲$

$ی + لا = ۲ ر$

جمع اور تفریق سے $ی = ر \pm ۱$

$لا = ر \mp ۱$

اول مساوات مفروضہ مین ان قیمتون کے مندرج کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$(ر \pm ۱)^2 - ر (ر \mp ۱) = ۱۰$

اسواسطے $ر = \pm ۳$

ان ر کی قیمتون کو ی اور لا کی قیمتون کے ساتھہ ترکیب دینے سے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

$لا = \pm ۲$

$ر = \pm ۳$

$ی = \pm ۴$

(۱۰) ان مساواتونکو حل کرو کہ

$لا (ر + ی) = ۱۴$

$ر (ی + لا) = ۱۸$

$ی (لا + ر) = ۲۰$

جمع کرنے سے ی ر + لا ی + ر لا = ۲۶

اس مساوات سے اول اور دوم اور سوم کو تفریق کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ی ر = ۱۲

لا ی = ۸

ر لا = ۶

ان تینون مساواتون کو باہم ضرب دو تو

لا^2 ر^2 ی^2 = ۵۷۶

لا ر ی = ± ۲۴

اب متواتر اس آخر مساوات پر اوپر کی تینون مساواتون کو تقسیم کرو تو

لا = ± ۲

ر = ± ۳

ی = ± ۴

امثلہ مشق ۵۰

(۱) لا + ر + ی = ۱۳
لا^2 + ر^2 + ی^2 = ۹۱
ر^2 = لا ی

(۲) لا^2 + لا ر + ر^2 = ۷
ر^2 + ر ی + ی^2 = ۱۹
ی^2 + ی لا + لا^2 = ۱۳

(۳) لا ر = ۸
(۳ − ر) ی = ۱۲
(۲ − لا) (۴ − ی) = ۴

(۴) لا (ر + ی) = $\frac{ا}{ح}$ + $\frac{ح}{ب}$
ر (ی + لا) = $\frac{ب}{ا}$ + $\frac{ا}{ح}$
ی (لا + ر) = $\frac{ح}{ب}$ + $\frac{ب}{ا}$

(۵) (ی + ر) + (ح − ا)^2 لا ر ی = ۰
(لا + ی) + (ا − ب)^2 لا^2 ی = ۰
(ر + لا) + (ب − ح)^2 لا ر ی = ۰

(۶) لا^2 + ر^2 + ی^2 = ۱۳
لا + ر + ی = ۱۹
لا ر + لا ی = ۴۸

(۷) لا^2 + ر^2 + ی^2 = ا
ر^2 = ۲ لا ی + ب
ح لا = د ی

(۸) لا ر = ع
(ب − ر) ی = ق
(ا − لا) (ح − ی) = ر

(۹) لا^2 + ر^2 + ی^2 = ک
ا لا + ا َ ر + ا ً ی = ۰
ب لا + ب َ ر + ب ً ی = ۰

(۱۰) ا لا ر + ب لا + ح ر + د = ۰
ا َ ر ی + ب َ ر + ح َ ی + د َ = ۰
ا ً ی لا + ب ً ی + ح ً لا + د ً = ۰

مساوات درجہ دوم کے سوالات

ان مثالون سے یہہ معلوم ہوگا کہ جو سوالات ایسے ہین کہ اون سے ہمزاد مساواتین درجہ دوم کی پیدا ہوکر ایک مجہول کی مساوات درجہ دوم کی پیدا ہوتی ہے کس طرح حل ہوجاتی ہین

مثالین

(۱) دو کسان ا اور ب ایک پیٹھہ مین گئے اور ہر ایک نے وہان ۲۲۰ روپیہ خرچ کیے ا نے ۵۰ بھیڑ بیت

اور ۱۲ گائین خریدین اور ب نے ۵۰ زیادہ بہیڑین بہ نسبت گائون کے خریدین اور دونو نے جو قیمت بہیڑون کی دی وہ ملکر اون دونون کے سرمایہ سے نصف تہی بتاؤ فی راس بہیڑ اور گای کیا قیمت تہی اور ہر ایک نے کتنے کتنے خریدین

اس مساوات مین چار مقادیر مجہول ہین یعنی قیمت ہر ایک بہیڑ اور قیمت گای اور تعداد بہیڑون اور تعداد گائون کی ان مقادیر مجہول کو لو و مو و لا اور ی سے تعبیر کرو تو بموجب شرائط سوال کے یہہ چار مساواتین حاصل ہونگین کہ

۵۰ لو + ۱۲ مو = ۲۲۰

لا لو + ی لو = ۲۳۰

۵۰ لو + لا لو = ۲۲۰

اول کو دوم مین سے اور سوم مین سے تفریق کرو تو لا = ی + ۵۰

(لا − ۵۰) لو + (ی − ۱۲) مو = ۰

ان مساواتون مین قیمت لا کی جو چوتہی مساوات سے نکلتی ہے مندرج کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ لا لو − ۱۲ مو = ۰

ی لو + (ی − ۱۲) مو = ۰

(ی + ۵۰) لو − ۱۲ مو = ۰

مو کے ساقط کرنے کے واسطے ان مساواتون مین سے اول مساوات کو ۱۲ مین ضرب دو اور دوسری کو (ی − ۱۲) مین اور جمع کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

[۱۲ ی + (ی + ۵۰) (ی − ۱۲)] لو = ۰

جو مقدار خطوط وحدانی مین لکہی ہے اسکو برابر صفر کے لکہو تو ی کی مساوات درجہ دوم یہہ حاصل ہوگی کہ

ی² + ۵۰ ی − ۶۰۰ = ۰

قیمتین اس مساوات کی − ۶۰ اور ۱۰ ہین منفی قیمت مساوات کی مناسب حال نہین ہے اسلئے اسکو ساقط کرو اسواسطے ب نے جو گائین خریدین وہ ۱۰ تہین اور اس سبب سے بہیڑین ۶۰ خریدی تہین مفروضہ مساواتون مین سے اول مساوات مین ان قیمتون کے مندرج کرنے سے ان مساواتون سے لو اور مو کی قیمتین تعین ہوتی ہین کہ

۵۰ لو + ۱۲ مو = ۲۲۰

۶۰ مو + ۱۰ مو = ۲۲۰

اسے لو = ۲ اور مو = ۱۰ کے حاصل ہوتا ہے

جواب ب نے ؛ ۶۰ بہیڑین فی ۲ روپیہ خریدین

۱۰ گائین فی ۱۰ روپیہ

(۲) سوہن نے سوہن کو دیکہا کہ پڑا سوتا ہے اور اوسکے پاس ایک پیپہ شراب کا بہرا ہوا رکہا ہے موہن نے یہہ موقع دیکہہ کر شراب پینی شروع کی اور اتنی دیر پی کہ وہ اوس وقت کی $\frac{۲}{۳}$ تہی جس وقت مین کہ کل پیپہ کی شراب سوہن اکیلا پیتا اتنے مین سوہن جاگ اٹہا اور جو کچہہ باقی شراب رہی تہی اوسکو پی گیا اگر دونو شراب ساتھہ پیتے تو دو گہنٹہ پیشتر شراب ختم ہو چکی ہوتی لیکن اس حالت مین موہن کے حصہ مین نصف شراب وہ آتی جو اوسنے سوہن کے واسطے چہوڑی تہی

یہہ سوال کام اور کاریگرون کا ہے صفحہ (۱۶۳) دیکہو فرض کرو کہ لد اور ی تعداد اون گہنٹون کی ہی جنمین موہن سوہن علیحدہ علیحدہ شراب پیکر اور ط تعداد اون گہنٹون کی ہی جنمین دونو ملکر پیپہ کی شراب کو پی کر خالی کرتے اور ق تعداد شراب کی بوتلون کی پیپہ مین ہے تو بموجب ہر ایک فرض کے ہر گہنٹہ مین بہ تفصیل ذیل مقدار شراب پی جائیگی

$$\frac{ق}{لد} \qquad \frac{ق}{ی} \qquad \frac{ق}{ط}$$

اسواسطے

$$\frac{1}{ط} = \frac{1}{لد} + \frac{1}{ی}$$

$$ط = \frac{لد\,ی}{لد + ی}$$

موہن نے جو شراب پی اوسکی مقدار $\frac{۲}{۳} ی = \frac{۲ق ی}{۳ لد}$

اور جو مقدار شراب کی سوہن کے واسطے چہوڑی گئی $= \frac{ق(۳لد - ۲ی)ی}{۳لد}$

اسواسطے بموجب شرط اول کے

$$\frac{۲ی}{۳} + \frac{(۳لد - ۲ی)ی}{۳لد} = \frac{لد\,ی}{لد + ی} + ۲$$

اور بموجب دوسری شرط کے

$$\frac{ق(۳لد - ۲ی)}{۳لد} = \frac{۳ق\,لد\,ی}{لد(لد + ی)}$$

اسسے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ $۳لد^۲ - ۵لد\,ی - ۲ی^۲ = ۰$

اسواسطے $لد = ۲ی$ اور $لد = -\frac{ی}{۳}$

اب یہان منفی قیمت تو سوال کی مناسب حال نہین اسلئے لد کی جگہہ قیمت ۲ی مساوات مین مندرج کرتے جسنے اول شرط تعبیر ہوتی تو یہہ حاصل ہوتا کہ $ی = ۳$ اور $لد = ۶$ اور $ط = ۲$

اسواسطے یہہ ہر صورت مین تفصیل ذیل حاصل ہوگا کہ

موہن ۶ گھنٹہ مین
سوہن ۳ گھنٹہ مین
موہن اور سوہن دونوں ملکر ۲ گھنٹہ مین

(۳) چار عدد متساوی الفرق ایسے دریافت کرو کہ اونکا حاصلضرب متواتر ۳۸۴ ہو اور مجموعہ اونکے مجذوروں کا ۱۲۰ ہے

مقادیر مجہولہ بالقرینہ ارتباط پاتی ہین اسلئے اونکو اسطرح فرض کرو کہ لا اور ی اوساط ہون تو اطراف فرق (ی − لا) کے جمع اور تفریق کرنے سے حاصل ہون اور چار عدد متساوی الفرق یہہ ہون کہ

$$(2\,\text{لا} - \text{ی}) \quad \text{لا} \quad \text{ی} \quad (2\,\text{ی} - \text{لا})$$

اونکے مربعون کے مجموعہ کے واسطے یہہ مساوات حاصل ہوگی کہ

$$6(\text{لا}^2 + \text{ی}^2) - 8\,\text{لا}\,\text{ی} = 120$$

اور حاصلضرب متواتر

$$5\,\text{لا}^2\text{ی}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{ی}\,(\text{لا}^2 + \text{ی}^2) = 384$$

حاصل ہوگا ان دو مساواتون سے لا اور ی اسطرح دریافت ہو سکتی ہین کہ فرض کرو

$$\text{لا} + \text{ی} = \text{ص}$$

$$\text{لا}\,\text{ی} = \text{ع}$$

تو صفحہ ۱۷۴ کے جملون سے یہہ دو مساواتین حاصل ہونگی

$$3\,\text{ص}^2 - 10\,\text{ع} = 60$$

$$9\,\text{ع}^2 - 2\,\text{ص}^2\text{ع} = 384$$

ص² کو ان سے ساقط کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$7\,\text{ع}^2 - 120\,\text{ع} - 1152 = 0$$

اسکی قیمتین ۲۴ اور $-\frac{48}{7}$ ہین

ہر ایک مساوات مین ان قیمتون مین سے مندرج کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ $\text{ص}^2 = 100$ اسواسطے

$$\text{لا} + \text{ی} = \pm 10$$

$$\text{لا}\,\text{ی} = 24$$

ان مساواتون سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{لا} = \pm 6 \quad \text{اور} \quad \text{ی} = \pm 4$$

اسواسطے اعداد مطلوب یہہ ہین کہ

۸ و ۶ و ۴ و ۲
−۸ و −۶ و −۴ و −۲

دوسری قیمت ع کی یعنی $-\frac{48}{7}$ سے خیالی جملے حاصل ہوتی ہین یعنی

$$\pm\sqrt{\text{ہ}-\tfrac{\text{ہ}}{\text{ح}}}\ \pm\ ۳\sqrt{\text{ہ}\tfrac{\text{۳ب}}{\text{ح}}}\ +\ \sqrt{\text{ہ}-\tfrac{\text{ہ}}{\text{ح}}}\ \pm\ \sqrt{\text{ہ}\tfrac{\text{۳ب}}{\text{ح}}}$$

$$\pm\sqrt{\text{ہ}-\tfrac{\text{ہ}}{\text{ح}}}\ \mp\ \sqrt{\text{ہ}\tfrac{\text{۳ب}}{\text{ح}}}\ \pm ۱\sqrt{\text{ہ}-\tfrac{\text{ہ}}{\text{ح}}}\ \mp\ ۳\sqrt{\text{ہ}\tfrac{\text{۳ب}}{\text{ح}}}$$

(۴) پانچ اعداد متناسب متوالی ایسی دریافت کرو کہ اونکا مجموعہ ۳۱ ہو اور مجموعہ اونکی مربعون کا ۳۴۱ ہو

فرض کرو کہ تین بیچ کی اعداد لا اور د اور ی ہین تو پانچ اعداد اسطرح تعبیر ہونگے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{د}}\qquad \text{لا}\qquad \text{د}\qquad \text{ی}\qquad \frac{\text{ی}^2}{\text{د}}$$

تو

$$\text{لا ی} = \text{د}^2$$

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{د}} + \text{لا} + \text{د} + \text{ی} + \frac{\text{ی}^2}{\text{د}} = ۳۱$$

$$\frac{\text{لا}^4}{\text{د}^2} + \text{لا}^2 + \text{د}^2 + \text{ی}^2 + \frac{\text{ی}^4}{\text{د}^2} = ۳۴۱$$

فرض کرو کہ

$$\text{لا} + \text{ی} = \text{ص}$$

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{د}} + \frac{\text{ی}^2}{\text{د}} = \text{صَ}$$

اب اخر دو مساواتین یہہ ہونگین

$$\text{ص} + \text{صَ} + \text{د} = ۳۱ \qquad (۱)$$

$$\text{صَ}^2 + \text{ص}^2 - ۳\text{د}^2 = ۳۴۱ \qquad (۲)$$

اور چونکہ $\text{لا}^2 + \text{ی}^2 = \text{صَ د}$ تو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

$$\text{ص}^2 - ۲\text{د}^2 = \text{صَ د}$$

صَ کو (۱) اور (۲) سے ساقط کرو اور (۳) کو تحویل کرکے یہہ حاصل کرو کہ

$$\text{ص}^2 + \text{ص د} - ۳۱\,\text{ص} - ۳۱\,\text{د} - \text{د}^2 + ۳۱۰ = ۰$$

(۱) اور (۳) کے درمیان صَ کو ساقط کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ص}^2 + \text{ص د} - ۳۱\,\text{د} - \text{د}^2 = ۰$$

اسکو اخر مساوات سے تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ص} = ۱۰$$

اس قیمت کو ص کی جگہہ رکہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{د}^2 + ۲۱\,\text{د} - ۱۰۰ = ۰$$

اسواسطے $\text{د} = ۴$ اور $\text{د} = -۲۵$

د کی اول قیمت کو کام مین لاؤ

$$\text{لا} + \text{ی} = ۱۰$$

$$\text{لا ی} = ۱۶$$

جسسے معلوم ہوتا کہ $\text{لا} = ۸$ $\text{لا} = ۲$

$\text{ی} = ۲$ $\text{ی} = ۸$

اسواسطے پانچ اعداد یہہ ہین کہ

۱ و ۳ و ۴ و ۸ و ۶

اب اگر ک کی دوسری قیمت یعنی - ۲۵ کام مین لائین تو ذیل کے جملے حاصل ہونگے جنمین سے چار جملے خیالی ہین

(۲۳ ∓ ۴ √۶-)　(۵ ± ۱۰ √۶-)

(۵ ∓ ۱۰ √۶-)　(۲۳ ± ۴ √۶-)

امثلہ مشق ۵۱

(۱) دو عدد ایسے دریافت کرو کہ مجموعہ اونکا ۶۰ ہو اور مجموعہ اونکے مربعون کا ۱۸۰۸ ہو

(۲) دو عدد ایسے دریافت کرو کہ حاصلضرب اونکا ۲۷۳ ہو اور مجموعہ اونکے مربعون کا ۵۸۵ ہو

(۳) ایسی دو عدد دریافت کرو کہ حاصلضرب اونکا ۵۷۵ ہو اور فرق اونکے مربعون کا ۹۶ ہو

(۴) دو عدد ایسی دریافت کرو کہ حاصلضرب اونکا ۲۶ ۱/۴ ہو اور فرق اونکے مربعون کا ۴۴ ہو

(۵) ایک ایکڑ مستطیل کہیت تہا جسکے ضلعون کا تفاوت ۳۳ گز تہا تو اوسکی اضلاع کا حساب بتلاؤ

(۶) ۲۹ کو ایسی دو حصون مین تقسیم کرو کہ مجموعہ اونکے مکعبون کا ۵۹۸۷ ہو

(۷) ۴۳ کو ایسی دو حصون مین تقسیم کرو کہ مجموعہ اونکے مکعبون کا ۴۴۷۲۹ ہو

(۸) دو متصل کے اعداد ایسے دریافت کرو کہ بڑے عدد کا مکعب چہوٹے عدد کے مکعب سے بقدر ۱۷۲ کے زیادہ ہو

(۹) دو صندوق بشکل مکعب ہین اور اونمین سماؤ ۴۰۷ مکعب انچ کا ہی اور جب ایک صندوق کو دوسرے صندوق پر رکہا تو کل اونچائی ۱۱ انچ ہوئی تو بتاؤ ہر ایک کی سمائی کسقدر ہے

(۱۰) دو عدد ایسی دریافت کرو کہ اونکا مجموعہ اور حاصلضرب اور مربعون کا تفاوت باہم برابر ہون

(۱۱) دو عدد ایسی دریافت کرو کہ اونکا مجموعہ اور حاصلضرب اور مربعون کا مجموعہ باہم برابر ہون

(۱۲) تین عدد متناسب ہین اونکا حاصلضرب ۲۱۶ ہی اور مجموعہ اونکا ۲۱ ہی اونکو دریافت کرو

(۱۳) دو عدد ایسی ہین کہ اونکا حاصلضرب برابر اونکے مربعون کی تفاوت کی اور مجموعہ اونکی مربعون کا برابر اونکے مکعبون کی تفاوت مطلوب یہہ ہے کہ اوسکو دریافت کرو

(۱۴) چار اعداد متساوی الفرق ہین جنکا مجموعہ ۱۸ ہے اور مجموعہ اونکے مربعون کا ۸۶ ہے اونکو دریافت کرو

(۱۵) چار اعداد متساوی الفرق ہین جنمین اطراف کے اندر تفاوت ۵۷ ہی اور حاصلضرب اوساط کا ۵۷ ہے اون اعداد کو دریافت کرو

(۱۶) دو عدد ایسی ہین کہ اونکی مربعون کا مجموعہ ۱۷۰ ہی اور اونکا حاصلضرب اونکے مجموعہ سے بقدر ۵۹ کے زیادہ ہے اون اعداد کو دریافت کرو

(۱۷) چار عدد متناسب ہین جنکا مجموعہ ۲۰ ہے اور مجموعہ اونکی مربعون کا ۱۳۰ ہی اونکو دریافت کرو

(۱۸) ایک عدد دو ہندسون کا ہی اونکا مجموعہ ۱۰ ہے اور اگر اوسکو ہندسون کے فرق مین ضرب دین تو حاصلضرب ۱۲۸ ہوتا ہے اوس عدد کو دریافت کرو

(۱۹) ایک عدد دو ہندسون کا ہی اور اونکی مربعون کا تفاوت ۴۰ ہی اور اگر اس عدد کی ہندسے معکوس کرین اور جو عدد اسطرح بنے اوسکو اصل عدد مین ضرب دین تو حاصلضرب ۲۷۰۱ ہوتا ہے اوس عدد کو دریافت کرو

(۲۰) ایک عدد دو ہندسون کا ہے جنکا حاصلضرب ۶ ہی اور اگر عدد کے ہندسے پلٹ کر لکھین تو ایسا عدد پیدا ہوتا ہی کہ اس عدد اور اصل عدد کے مربعون کا تفاوت ۴۹۵ ہوتا ہے اوس عدد کو دریافت کرو

(۲۱) ایک کسر دریافت کرو کہ جسکے شمار کنندہ اور نسب نما کا مجموعہ ۱۱ ہو اور اگر اوسکو ایسی کسر مین سے تفریق کرین جسکا شمار کنندہ اور نسب نما بقدر ۲ کے زیادہ ہو تو تفاوت $\frac{1}{24}$ ہو

(۲۲) ایک کسر شمار کنندہ اور نسب نما کے مربعون کا مجموعہ ۳۸۹ ہی اور اوس کسر اور اوسکے متکافی کسر کا فرق $\frac{189}{170}$ ہے اوس کسر کو دریافت کرو

(۲۳) ایک عدد ایسا ہی کہ اگر ۶۳ اوسمین سے تفریق کیا جاوی تو اوسکے ہندسے معکوس ہو جاتے ہین اور اگر اوسکو ہندسون کے مجموعہ مین ضرب دین تو حاصلضرب ۱۰۱۲ ہو اوس عدد کو دریافت کرو

(۲۴) ایک عدد دو ہندسون کا ہی اگر اوسکو مقلوب کر لین اور پہر دونو عددون کو ضرب دین تو حاصلضرب ۲۲۷۸ حاصل ہوگا اور اگر اول عدد کو دوسرے عدد پر تقسیم کرین تو خارج قسمت ا نکلیگا اور باقی ایک ہندسہ رہیگا اوس عدد کو دریافت کرو

(۲۵) دو اعداد ایسی دریافت کرو کہ اونکے مجموعہ اور اونکے مربعون کے مجموعہ کا حاصلضرب ۲۷۲ ہو اور اونکے فرق کو اونکے مربعون کے فرق مین ضرب دین تو حاصلضرب ۳۲ ہو

(۲۶) ایک شخص نے بانات ایک پونڈ گز کے حساب سے کچھہ خریدی اور اوسی ایک اعلی

بہا

قسم کی بانات تھی وہ اوسنے پہلے بانات سے ۳ گز کم خریدی اور قیمت وہی دی جو پہلے دی تھی
اور ۳ پنس فی گز زیادہ دئی تو بتاؤ ہر ایک قسم کی بانات کتنی خریدی اور کس قیمت پر

(۲۷) ایک آدمی پاس ۳۰۰۰ روپیہ تھی اوسنے دو حصے کرکے سود دی دئیے اور ہر حصے
اوسکی آمدنی ایک ہی تھی اگر وہ پہلے حصہ کی جمع کو دوسرے حصہ کی شرح فیصدی سود پر دیتا
تو اوسکی آمدنی ۴۳۰ روپیہ کی ہوتی اور اگر دوسری حصہ کو پہلے حصہ کی شرح سود فیصدی پر
دیتا تو آمدنی ۴۹۰ روپیہ ہوتی اب بتاؤ کہ ہر حصہ مین کتنے روپیہ تھے اور شرح سود کیا تھی

(۲۸) تین اعداد متناسب ہین اونکا حاصل ضرب ۴۰۹۶ ہے اور اطراف کا مجموعہ ۶۸ اون اعداد کو

(۲۹) ایک کسان نے بھیڑین اور گائین ۱۰۴ پونڈ کی خریدین اور ہر بھیڑ کی قیمت مین شلنگ بقدر
دئے جسقدر بھیڑین اور گائین تھین اور جتنے پونڈ گائونکی قیمت مین دئیے ہین وہ ہی برابر ان جانورونکی
تعداد کے ہین اور سوا ازین بھیڑین تعداد مین گائون سے بقدر ۲۴ کی زیادہ ہین تو بتاؤ کتنی بھیڑین تھین
اور کتنی گائین اور ہر ایک کی قیمت کیا ہی

(۳۰) ایک گاڑی کا پچھلا پہیہ بہ نسبت اگلے پہیہ کے ۳۰ گز چلنے مین ۶ گردشین زیادہ کرتا ہی اگر محیط
ہر ایک پہیہ کا ایک گز زیادہ کردیا جاتا تو مسافت مذکور کے طے کرنے مین پہیوں کے چکرون کے اندر فقط
۴ چکرون کا فرق رہتا تو محیط ہر پہیہ کا دریافت کرو

(۳۱) ا اور ب نے ۳۰۰۰ روپیہ سے تجارت شروع کیا ۱۲ مہینہ کے بعد ا نے ۱۰۴۰ روپیہ اصل اور
نفع کی علیحدہ کرلئے اور ب کو ۷ مہینہ کے بعد ۱۷۱۰ روپیہ ہاتھ لگے اصلی حصے اور شرح نفع
کی دریافت کرو

(۳۲) ا اور ب نے کچھ بھیڑین ۳۴۱ روپیہ کو بیچین ا نے ب سے ۴ بھیڑین زیادہ بیچی تھین اگر وہ
اسیقدر بیچتا جسقدر کہ ب نے بیچی تھین اور قیمت اپنی بھیڑون کی یہی لیتا تو اوسکو ۵۰ روپیہ
ہاتھ لگتے اور اگر ب اوسیقدر بھیڑین بیچتا جسقدر کہ ا نے بیچی تھین اور قیمت اپنی بھیڑون کی یہی
لیتا تو اوسکو ۴۰ روپیہ حاصل ہوتے تو بتاؤ ہر ایک نے کتنی کتنی بھیڑین بیچین اور کس قیمت پر

(۳۳) ایک مربع کہیت کا رقبہ ایک گول کہیت کے رقبہ سے بقدر ایک ایکڑ کے بڑا ہی اور احاطہ پہلے کہیت کا ۴۰۰ گز زیادہ لنبا دوسرے کہیت کی احاطہ سے ہی تو اونکی طول عرض دریافت کرو

(۳۴) ایک کسر ایسی ہی کہ اگر اوسکی شمار کنندہ پر ۲ زیادہ کرین اور نسب نما سے ۲ تفریق کرین تو ایسی کسر حاصل ہوتی ہے کہ پہلی کسر کی متکافی ہوتی ہی اور اگر نسب نما پر ۲ زیادہ کرین اور شمار کنندہ سے ۳ کم کرین تو ایسی کسر حاصل ہوتی ہے کہ وہ کسر متکافی سے بقدر $1\frac{1}{15}$ کم ہوتی ہے بتاو وہ کیا کسر ہے

(۳۵) اس سوال کو عام طور پر حل کرو اور بجاے ۲ اور $1\frac{1}{15}$ کے ا اور ب رکہو

(۳۶) ایک مثلث قائم الزاویہ کہیت کے زاویہ قائمہ سے دو لڑکے مقابل سمتون مین دوڑے اور اونکی رفتارون مین نسبت ۱۳ : ۱۱ کی ہے اول وہ مثلث قائم الزاویہ کے وتر کے عین وسط مین ملے اور پہر دوبارہ اوس مقام پر ملے جو اونکی چلنے کی جگہہ سے ۳۲ گز کے فاصلہ پر تہا مثلث کے اضلاع دریافت کرو

(۳۷) ۳۰۰۰ کو اس طرح مفرد سود پر چلایا کہ بعد کچہہ برسون کے اصل مع سود کے ۳۶۰۰ روپیہ ہو گئے اب اگر یہی روپیہ دو برس اور اوس شرح سود پر رہی جو پہلی شرح سی ایک روپیہ سیکڑہ زیادہ ہو تو ۵۴۰ روپیہ حاصل ہوتی ہین شرح سود اور تعداد برسونکی اول جمع کے واسطے دریافت کرو

(۳۸) ایک ظرف آدہا بہرا ہوا ہی ایک دہانہ سی کچہہ وقت مین پر ہو جاتا ہی اور ایک سوراخ سے کچہہ وقت مین خالی ہو جاتا ہی اگر دہانہ اور سوراخ دونو کہول دیئے جاتی ہین تو وہ ۱۲ گہنٹہ مین خالی ہوتا ہے، اور اگر دہانہ اور سوراخ کو اتنا چہوٹا کر دین کہ ایک سے نصف گہنٹہ زاید مین آدہا ظرف پر ہو اور دوسرے سے نصف گہنٹہ زائد مین نصف ظرف خالی ہو اور دونو کہول دئے جاتی تو ۱۵ $\frac{3}{4}$ گہنٹہ مین ظرف خالی ہوتا ہی تو بتاو کس وقت مین اول دہانہ سی وہ حوض پر ہوگا اور دوسرے سے کتنی دیر مین بہرا ہوا ظرف خالی ہوگا

(۳۹) اسقدر روپیہ کسی شرح سود پر دیا کہ ایک سال مین ۹۳۰۱ روپیہ مول بیاج کا ہو گیا اگر شرح سود فیصدی ایک کم ہوتی اور اصل ۱۰۰ روپیہ زیادہ ہوتی تو بہی یہی مول بیاج ہوتا اب اصل اور بیاج

(۴۴) ایک کسان پیٹھ میں گیا وہاں ایک گائی کی قیمت ۳ بھیڑوں کی برابر تھی اور وہ ۱۳۵ روپیہ میں بھیڑیں گاؤں سے دوچند خرید سکتا تھا مگر شام تک وہ پیٹھ میں ٹھہرا رہا اس وقت گا کی قیمت سوا روپیہ فی گای اور بھیڑ کی قیمت ۶/۸ پائی کم ہو گئی اور اوسنی ۱۳۵ روپیہ میں گنی بھیڑیں بہ نسبت گایونکی خریدیں اور جسقدر مویشی وہ صبح کو خرید سکتا تھا اوسی اب دس زیادہ ای تو بتاؤ کتنی بھیڑیں اور کتنی گائیں اوسنے خریدیں اور ہر ایک کی قیمت کیا تھی

جوابات

(۱) ۲۷ ا + ۱۵ ح (۲) ۱۵ لا + د + ۱۱

(۳) ۲۳ اب + ۷ اب + ۱۵ ب + ۱۴

(۴) ۴ لا − ۷ ا ز + ۱۴ ی + ۱۳ لا د + ۹ ی د + ۱۰۰

(۵) ۲۸ لا + ۵ لا + ۸ لا + ۱۷ (۶) (ا − ق + ۱) لا + (ح + ع − ۱) ز

(۷) ۸ لا + ۱۷ ا − ۲۵ ب + ۲۳ لا د + ۳ ح + ۵۶ ی − ۱۰۰

(۸) ۱۵ ا + ۱ اب + ح + ۲

(۹) (س + ک + ۲) لا + گ لا د + (ھ + ن + ۴) ز

(۱۰) ۳ ا − ۴۳ ب + ۱۳ ح + ۲۱ د + ۱

جوابات مشق ۲

(۱) ا − ۲ ب − ح (۲) ۱۱ ا − ۴ اب + ۶ ب

(۳) ۳ لا − لا − ۶ لا + ۳ (۴) ۲۸ لا د + ۲۰ لا ی − ۲۷ لا د + ۱۰

(۵) ۳ ا − ۶ ب + ۲ ح − ۳

(۶) (م − ا) لا − (ن + س) لا د + (ع + ح) ز

(۷) ۲ ا لا + ۲ ب لا + ۲ ح لا + ۲ ا ب ح

(۸) − ۸ لا − ۶ د + ۳ لا د − ۹ لا د

(۹) (ا − ۱) لا − (ب + ۱) لا + ح − ۱

(۱۰) ۱۲ لا − ۱۰ لا د − ۱۰ د + ۵ لا − ۳ د + ۴

جواب مشق ۳

(۱) ب (۲) ا − ۴ ب + ۱ (۳) ۰ (۴) ۲ لا د − لا + لا ی

(۳) $ا^2 + ب^2 + ج^2 + د^2 + ۲اب - ۲اج - ۲اد - ۲بج - ۲بد + ۲جد$

(۴) $۴لا^2 + ۱۲لای + ۹ی^2 - ۴لا - ۶ی + ۱$

(۵) $لا^{10} + ۲لا^9 + ۳لا^8 + ۴لا^7 + ۵لا^6 + ۶لا^5 + ۵لا^4 + ۴لا^3 + ۳لا^2 + ۲لا + ۱$

(۶) $۱ + ۸لا^2 + ۳۴لا^4 + ۱۰۴لا^6 + ۲۰۹لا^8 + ۲۸۸لا^{10} + ۲۵۶لا^{12}$

(۷) $۱ - ۶لا + ۱۵لا^2 - ۲۰لا^3 + ۱۵لا^4 - ۶لا^5 + لا^6$

(۸) $۱ + ۳لا + ۶لا^2 + ۷لا^3 + ۶لا^4 + ۳لا^5 + لا^6$

(۹) $لا^3 + ک^3 + ی^3 + ۳لا^2ک + ۳لاک^2 + ۳لا^2ی + ۳لای^2 + ۳ک^2ی + ۳کی^2 + ۶لاکی$

(۱۰) $لا^2 + ک^2 + ی^2 - ۲لاک + ۲لای - ۲کی - ۲لا + ۲ک - ۲ی + ۱$

جوابات مشق ۱۳

(۱) $۱ - لا + لا^2 - لا^3 + لا^4 - لا^5 + لا^6 -$ وغیرہا

(۲) $۱ + لا + لا^2 + ۲لا^3 + ۲لا^4 + ۲لا^5 +$ وغیرہا

(۳) $۱ + لا + ۲لا^2 - ۲لا^3 + ۲لا^4 -$ وغیرہا

(۴) $۱ - لا + ۲لا^2 - ۳لا^3 + ۴لا^4 - ۵لا^5 +$ وغیرہا

(۵) $۱ - ۲لا + ۷۵لا^2 - ۵۰لا^3 + ۳۱۲۵لا^4 -$ وغیرہا

(۶) $۱ + (م + ن)لا + ن(م + ن)لا^2 + ن^2(م + ن)لا^3 +$ وغیرہا

(۷) $ا + (اب + ب)لا + (اب + ب ب + س)لا^2 +$
$(اب^3 + ب ب^2 + س ب + د)لا^3 +$ وغیرہا

جوابات مشق ۱۴

(۱) $ا^6 + ۶ا^5لا + ۱۵ا^4لا^2 + ۲۰ا^3لا^3 + ۱۵ا^2لا^4 + ۶الا^5 + لا^6$

(۲) $ا^6 - ۶ا^5لا + ۱۵ا^4لا^2 - ۲۰ا^3لا^3 + ۱۵ا^2لا^4 - ۶الا^5 + لا^6$

(۳) $ا^4لا^4 + ۴ا^3ب لا^3ی + ۶ا^2ب^2لا^2ی^2 + ۴اب^3لای^3 + ب^4ی^4$

(۴) $۱ - ۹لا + ۳۶لا^2 - ۸۴لا^3 + ۱۲۶لا^4 - ۱۲۶لا^5 + ۸۴لا^6 - ۳۶لا^7 + ۹لا^8 - لا^9$

(۵) $۱ - ۷لا + ۲۱لا^2 - ۳۵لا^3 + ۳۵لا^4 - ۲۱لا^5 + ۷لا^6 - لا^7$

(۶) $لا^5 - ۵لا^4ی + ۱۰لا^3ی^2 - ۱۰لا^2ی^3 + ۵لای^4 - ی^5$

(۷) ۱ و ۱۱ و ۵۵ و ۱۶۵ و ۳۳۰ و ۴۶۲ و ۴۶۲ و ۳۳۰ و ۱۶۵ و ۵۵ و ۱۱ و ۱

جوابات مشق ۱۵

(۱) $۱ + ۲الا + (۲ب + ا^2)لا^2 + ۲اب لا^3 + ب^2لا^4$

(۲) $۱ - ۲الا + (۲ب + ا^2)لا^2 - ۲اب لا^3 + ب^2لا^4$

(۳) ا^۲ + ۲اب لا + (۲اج + ب^۲) لا^۲ + ۲ب ج لا^۳ + ج^۲ لا^۴

(۴) ا^۲ + ۲اب لا + (ب^۲ − ۲اج) لا^۲ − ۲ب ج لا^۳ + ج^۲ لا^۴

(۵) ا^۶ − ۳ا^۵ ب + ۶ا^۴ ب^۲ − ۷ا^۳ ب^۳ + ۶ا^۲ ب^۴ − ۳ا ب^۵ + ب^۶

(۶) ۱ + ۶لا + ۲۱لا^۲ + ۴۴لا^۳ + ۶۳لا^۴ + ۵۴لا^۵ + ۲۷لا^۶

(۷) ۴ − ۱۲د + ۱۶ی + ۹د^۲ − ۲۴د ی + ۱۶ی^۲

(۸) ا^۳ − ۳ا^۲ ب د + ۶ا^۲ ی + ۳ا ب^۲ د^۲ − ۱۲ا ب د ی + ۱۲ا ی^۲ − ب^۳ د^۳ + ۶ب^۲ د^۲ ی − ۱۲ب د ی^۲ + ۸ی^۳

(۹) ۱ + ۴لا + ۱۰لا^۲ + ۱۶لا^۳ + ۱۹لا^۴ + ۱۶لا^۵ + ۱۰لا^۶ + ۴لا^۷ + لا^۸

(۱۰) م^۳ + (۳ع − ۶ن) م^۲ + (۳ع^۲ − ۱۲ع ن + ۱۲ن^۲) م + ع^۳ − ۶ع^۲ ن + ۱۲ع ن^۲ − ۸ن^۳

جوابات امثلہ ۱۶

(۱) ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ + ۲(اب − اج − ب ج)

(۲) ۱ + ۲لا + ۵لا^۲ + ۴لا^۳ + ۴لا^۴

(۳) ۱ + ۲لا + ۳لا^۲ + ۴لا^۳ + ۳لا^۴ + ۲لا^۵ + لا^۶

(۳۵) لا = ½ (۲√۲۶ - ۲√۱۶)

جوابات سوالات ۳۳

(۱) ۲۰ اور ۱۴ (۲) ۴ اور ۷ (۳) ۱۲ اور ۱۸ (۴) ۹۹ فیٹ (۵) ۲

(۶) ۱۲ سکس پنس ۴ شلنگ ۶ طورن ۲ ہاف کرون (۷) ۴۴ فیٹ (۸) ۱۷ اور ۱۸

(۹) ۳۰۴ روپیہ ۱۶ روپیہ (۱۰) ۳ ۴ پائی (۱۱) ۹۰ (۱۲) ۴۴ گیلن (۱۳) ۸۰ دن

(۱۴) ۵۶ ناشپاتی ۸۱ سیب (۱۵) ۱۱۴ روپیہ ۸۷ اور ۷۵ روپیہ (۱۶) ۲۷ میل

(۱۷) ۳۷ گیلن (۱۸) (ام + ب ن + ح ع + وغیرہما) / (ا + ب + ح + وغیرہما) (۱۹) ۲۸۰۰۰ روپیہ

(۲۰) ۳ ½ منٹ (۲۱) ۷۴ گز (۲۲) ۱۷ میل ۴ گھنٹہ (۲۳) ن د/(م - ن) میل و م ن/(م - ن) گھنٹہ

(۲۴) ۳۵ (۲۵) ۳۶ دن (۲۶) ۲ ۳/۷ (۲۷) ۸۰ ہاف گنی ۲۴ کرون

(۲۸) ۴۳/۱۱ گھنٹہ میں جسم = ۱ و ۲ و ۳ ۰۰۰ متواتر (۲۹) ۲۷ ذقند جبکہ خرگوش ۱۰۸

(۳۰) (ط - ط)/(ط + ط) (۳۱) ۳ میل ۱۲ میل (۳۲) ۶۲۲ اروپیہ (۳۳) ۲۲۵ روپیہ ۱۸۰ روپیہ ۷۵ روپیہ

(۳۴) ۱۰۰۰ روپیہ (۳۵) ۴ سکنڈ فی گھنٹہ (۳۶) ۵۵ سکس پنس ۹ شلنگ اور ۴ سورن (۳۷) ۱۲ میل اور ۴ ۳ میل (۳۸) ۵ گھنٹہ ۳ گھنٹہ ۲۰ میل ۱۴ میل (۳۹) ۱۲ میل

(۴۰) ۸۴ (۴۱) ۲۶ ۹/۱۱ منٹ بعد ۲ بجے کے (۴۲) ۲۰ درجن (۴۳) ۶ فٹ

(۴۴) بیٹے کا حصہ ۹۰۰ روپیہ لڑکی کا حصہ ۶۰۰ روپیہ بیوہ کا حصہ ۷۵۰ روپیہ

(۴۵) ۴۰۰۰ و ۱۵۰۰ و ۴۰۰

(۴۶) (ن و + ن َو َ)/(و + و َ) و (ص و + ص َو َ)/(و + و َ) و (ح و + ح َو َ)/(و + و َ) (۴۷) ۱۵ ہنڈریڈ ویٹ

(۴۸) ۹۰ آدمی (۴۹) دس لاکھ (۵۰) ۷۵۰۰ روپیہ ۲۷۴۴۳ روپیہ

جوابات ۳۴

(۱) - ۱ و - ۳ (۲) ۲ و ۴/۰ (۳) - ۳ و ۵ ½ (۴) ۳/۲ و - ۳/۴ (۵) ۹/۱۱ و ۱/۱۰

(۶) ۱/۱۲ و - ۱/۳۱ (۷) ½ و ۱/۱۸ (۸) ۳/۴ و ¼ (۹) ۶/۵۵ و - ۱/۳۸۵

(۱۰) - ۶ و - ۳/۲ (۱۱) (۱۸ ± ۲√۶)/۱ (۱۲) ۲ و - ۱/۳ (۱۳) ۵/۴ و - ۱/۴

(۱۱) $(۳لا + ۷)^۲ + ۱$ (۱۲) $(۴لا - ۳)^۲ + ۴۹$

جوابات مشق ۳۸

(۱) اکوم : ن کی نسبت سے تقسیم کرو (۲) ہر ایک جز ضربی = $\sqrt{ن}$

(۳) حد کمی کی قیمت = $(\sqrt{ا} - \sqrt{ب})^۲$ اور لا = $\sqrt{اب}$

حد زیادتی کی قیمت = $(\sqrt{ا} - \sqrt{ب})^۲$ اور لا = $-\sqrt{اب}$

(۴) حد کمی کی قیمت = ۲ اور لا = ۱ اور حد زیادتی کی قیمت = ۱ اور لا = $\frac{۱}{۲}$

(۵) حد کمی کی قیمت = $\frac{(ا+ب)^۲}{ا}$ اور لا = $\frac{ا}{ا+ب}$ اور حد زیادتی کی قیمت $\frac{(ا-ب)^۲}{ا}$

لا = $\frac{ا}{ا-ب}$

جوابات مشق ۳۹

(۱) لا = ۴، ی = ۳ (۲) لا = ۱، ی = ۲ (۳) لا = ۵، ی = ۲ (۴) لا = ۲، ی = ۳

(۵) لا = ۴، ی = ۵ (۶) لا = ۴، ی = ۱۲ (۷) لا = ۴، ی = ۳ (۸) لا = ۱۰، ی = ۱۲

(۹) لا = ۹، ی = ۱۰ (۱۰) لا = $\frac{۱}{۴}$، ی = $\frac{۱}{۵}$ (۱۱) لا = ۲، ی = ۱۳ (۱۲) لا = ۴، ی = ۱

(۱۳) لا = ۱۶، ی = ۳۵ (۱۴) لا = ۴$\frac{۱}{۲}$، ی = ۸$\frac{۱}{۲}$ (۱۵) لا = ۸۸$\frac{۳}{۴}$، ی = ۱۷$\frac{۳}{۴}$ (۱۶) لا = ۱۷$\frac{۱}{۲}$، ی = ۱۱۵$\frac{۳}{۵}$

(۱۷) لا = ۴۸۰، ی = ۶۷۲ (۱۸) لا = $\frac{۱}{۴}$، ی = $\frac{۱}{۵}$ (۱۹) لا = ۶۵، ی = ۶۶ (۲۰) لا = ۱۱، ی = ۱۷

جوابات مشق ۴۰

(۱) لا = ۴، ی = ۳ (۲) لا = ۲، ی = ۵ (۳) لا = ۱، ی = ۸ (۴) لا = $\frac{۱}{۲}$، ی = $\frac{۱}{۳}$

(۵) لا = $\frac{۱}{۴}$، ی = $\frac{۱}{۷}$ (۶) لا = ۱$\frac{۱}{۲}$، ی = $\frac{۱}{۳}$ (۷) لا = ۲$\frac{۱}{۲}$، ی = ۳$\frac{۱}{۳}$ (۸) لا = ۴$\frac{۲}{۳}$، ی = ۲۵$\frac{۲}{۳}$

(۹) لا = ۱، ی = −۱۱ (۱۰) لا = ۳$\frac{۵}{۶}$، ی = −۲ (۱۱) لا = ۹، ی = $-\frac{۱}{۲}$ (۱۲) لا = ۱۱، ی = ۱۳

(۱۳) لا = $\frac{۱}{۳}$، ی = ۲ (۱۴) لا = $\frac{۵}{۷}$، ی = $\frac{۵}{۸}$ (۱۵) لا = ۱۱، ی = ۱۲ (۱۶) لا = ۴$\frac{۱}{۲}$، ی = ۱$\frac{۱}{۲}$

جوابات مشق ۴۱

(اً لا + ٹ)[(ب ٹ - ا د) لا + ٹ د - ح دً]

+ (حً لا + دً)[ا حَ - اَ ب) + ح حَ - اَ د] = ۰

جوابات مشق ۱۵

(۱) ۲۸ و ۳۲ (۲) ۱۶ و ۱۷ (۳) ۲۵ و ۲۳ (۴) ۷½ و ۳½ (۵) ۸۸ و ۵۵

(۶) ۱۹ و ۱۰ (۷) ۳۰ و ۱۴ (۸) ۱۰ و ۹ (۹) مکعب ۳۴۳ و ۶۴ مکعب

(۱۰) ½ (۱ + √۵) (۱۱) ½ (۳۱ + √۳) (۱۲) ۳ و ۶ و ۱۲

½ (۳ + √۵) ½ (۳۱ - √۳)

(۱۳) ½ √۵ و ½ (۵ + √۵) (۱۴) ۳۰ و ۴۰ و ۵۰ و ۶۰ (۱۵) ۵ و ۷½ و ۱۰ و ۱۲½

(۱۶) ۱۱ و ۷ (۱۷) ۲ و ۴ و ۸ و ۱۶ (۱۸) ۶۴ (۱۹) ۷۳ (۲۰) ۳۲

(۲۱) ۵/۶ و -۷۷/۸۸ (۲۲) ۱۷/۱۰ (۲۳) ۹۲ (۲۴) ۹۸ (۲۵) ۵ اور ۳

(۲۶) ۱۵ گز ۱۶ پائی (۲۷) ۶۰۰۰ روپیہ ۷ روپیہ سیکڑہ

۱۲ گز ۲۰ پائی ۷۰۰۰ روپیہ ۶ روپیہ سیکڑہ

(۲۸) ۳۴ و ۱۶ و ۶۴ (۲۹) ۳۳ بھیڑیں ۲ پونڈ ۸ گائیں ۵ پونڈ

(۳۰) آگے کا پہیہ ۴ گز اور پچھلا پہیہ ۵ گز (۳۱) ا کا حصہ = ۸۰۰ روپیہ ب کا حصہ = ۱۲۰۰ روپیہ

نفع ۳۰ روپیہ سیکڑہ (۳۲) ا نے ۸ بھیڑیں فی بھیڑ [illegible] اور ب فی ۴ بھیڑیں اور فی بھیڑ [illegible]

(۳۳) قطر دائرہ = ۶۵ و گز (۳۴) ۵/۲ د [illegible]

ضلع مربع کا = ۵۸ ۸ گز

(۳۵) [illegible] (۳۶) ۹۰ گز ۲۰ گز اور ۱۵۰ گز

(۳۷) ۵ برس ۴ روپیہ سیکڑہ یا ۸ برس ۲½ روپیہ سیکڑہ

(۳۸) اول دہانہ سے ۸ گھنٹہ دوسرے سوراخ سے ۶ گھنٹہ

(۳۹) اصل = ۱۰۴۰۰۰ اشرح سود ۵ روپیہ (۴۰) ۳۰ بھیڑیں اور ۳ روپیہ [illegible]

اور ۱۰ گائیں ۶ روپیہ [illegible]

تمام شد ۷ جنوری سنہ ۱۸۷۳ء